现代应用数学丛书

网络理论

〔日〕喜安善市 大野克郎 池野信一 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

网络理論

喜安善市
〔日〕大野克郎 著
池野信一
陆志刚 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，重点介紹网絡的綜合理論。共分两篇9章。第一篇7章，叙述网絡的基础理論和傳輸四端网絡的設計方法，对二端及四端网絡的逼近問題、实現問題、等效問題作了系統扼要的討論。第二篇2章介紹多端网絡理論，主要属于本书作者大野克郎的工作。

本书可供数学工作者及有关的工程技术人員、科研工作者参考。

現代应用数学丛书

网 絡 理 論

原书名 回路網理論
原出版者 岩波书店，1957
喜安善市
原著者 〔日〕大野克郎
池野信一
譯者 陆志刚

*

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行·各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張4 30/32 字数114,000
1963年6月第1版 1963年6月第1次印刷
印数 1—5,000

統一书号：13119·511
定 价：(十四) 0.84元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯者序

各个元件所組成的一个系統都可看成为一个网絡。网絡理論就是研究网絡的普遍定律及其計算方法的理論。近一百多年来，网絡理論已經形成为一門独立的学科，并且在各个不同領域內得到了广泛的应用。

本书叙述了网絡理論中，特别是綫性无源网絡的綜合理論中，近数十年来的主要結果，国內这类书籍极少，确是值得介紹的一本。其优点是內容精练、編排妥善。当然，伴随而来的缺点是証明不严格，或者只能知道最后結果，看不到中間細节。此外，本书的內容还只是网絡理論中一部分成果，远不是网絡理論的全貌。

下面想对各个章节再作些补充說明。

第1章

近年来，网絡理論的新兴学科分支很多，其中特别重要的，还有应用在微波范圍的**微波网絡**或**立体网絡理論**，与近年来发展起来的参量放大器密切有关的**变参量网絡理論**，以及从网絡观点上研究信息傳輸的**信息网絡理論**。

事实上，网絡理論依靠近代数学工具开辟了各个方向，这些方向大致有

1. 拓扑学在网絡理論上的应用——网絡拓扑理論，
2. Boole 代数在网絡理論上的应用——开关网絡理論，
3. 矩陣及張量在网絡理論上的应用——多端网絡理論，
4. 場論在网絡理論上的应用——微波网絡理論，
5. 非綫性微分方程在网絡理論上的应用——非綫性网絡理論，

6．变系数微分方程在网絡理論上的应用——变参量网絡理論，

7．函数論在网絡理論上的应用——网絡綜合理論，

8．概率論和統計数学在网絡理論上的应用——信息网絡理論，

本书所述的网絡理論，主要是函数論的方向，亦就是近数十年来，主要的方向——网絡綜合。

网絡綜合理論主要包括三个方面，第一是逼近理論，第二是实現理論，第三是等效理論。逼近理論卽是如何由实践給出的条件，近似地化成可实現网絡的必要和充分的条件。实現理論主要研究一个物理可实現网絡所必須滿足的条件和能够求出网絡結构及元件数值的充分条件。等效理論卽是在保持某种对外关系下，由一种結构变換成另一种結构的普遍方法。本书在这三方面都談到一些，但重点是在实現理論。

第1章內，把实部和虛部的关系作为綫性网絡的性质放在最后，似乎另立一章更相宜。这里只列出了其間的关系，至于这些关系的詳細証明以及如何使用曲綫或数表近似地計算，請参閱 Bode❶，Tuttle❷，Thomas❸。

第2章

对于二端网絡的一些定理，这本书写得很好。讀者若要知道細节，可以参考 Tuttle❷。在二端网絡理論內，除了正实函数外，

---

❶ H. W. Bode: Network analysis and feedback amplifier design, D. Van Nostrand, New York, 1945.

❷ D. F. Tuttle, Jr.: Network Synthesis, John Wiley & Sons, New York, 1958.

❸ D. E. Thomas, Tables of phase associated with a semi-infinite unit slope of attenuation, B. S. T. J., 26(1947), 870～899.

还可加入损耗函数的概念❶，损耗函数或称関乃大函数❷，它的定义是满足下列条件的函数 $W(\lambda)$：

(1) λ 为实数时 $W(\lambda)$ 为实数，

(2) $W(\lambda)$ 在 λ 的右半閉平面上是正規的，但 $\lambda\to\infty$ 时可能是例外，$W(\lambda)$ 在 $\lambda=\infty$ 允許有一个单阶极点，

(3) 在 λ 的虛軸上，$\mathrm{Re}W(\lambda)>0$，但 $\lambda\to\infty$ 时可能是例外，$W(\lambda)$ 在 $\lambda=\infty$ 允許有一个单阶零点，此时 $\mathrm{Re}\,W^{-1}(\lambda)$ 必須是正的实数。

损耗函数在处理带损耗的电抗元件所构成的网絡时很有用❸。此外，近年来对于 Bott-Duffin 綜合法提出了許多种变形❹，对于不是有理的正实函数亦有許多討論❺。这一章最后提到的宮田方法現在已被推广❻。

❶ 參看関乃大: Verwirklichnung von linearen Zweipolschaltungen vorgeschriebener Frequenzabhänigkeit unter Berücksichtigung der Verluste von Spulen und Kondensatoren, Arch. Elektrotech., 39(1949), 359～387.

❷ 參看 Б. В. Булгаков: Колебания, Москва, Техникотеоретической литературы, 1954.

❸ 參看関乃大: Verwirklichnung von linearen Vierpolschaltungen vorgeschriebener Frequenzabhänigkeit unter Berücksichtigung übereinstimmender Verluste aller Spulen und Kondensatoren, Arch. Elektrotech., 39(1949), 452～471.

❹ 參看 R. H. Pantell: New methods of drivingpoint and transfer-function synthesis, Stanford University Tech. Rept., 1954, Proc. IRE, 42(1954), 861, 及 J. E. Storer: Relationship between the Bott-Duffin and Pantell Impedance Synthesis, Proc. IRE, 42 (1954) 1451 和 F. M. Reza: A Bridge Equivalent for a Brune Cycle Terminated in a Resistor, Proc. IRE,42(1954),1321.

❺ 參看 L. Weinberg, Progress in the United States During 1957～1960 on Circuit Theory, Jour. of Research of the National Bureau of Standards, 64D (1960), No. 6, 687～706.

❻ 參看 E. A. Guillemin: New Methods of Driving-point and Transfer Impedance Synthesis, Proc. Symposium Modern Network Synthesis (1955), 119, 及 E. S. Kuh: Special Synthesis Techniques for Driving-point Impedance Functions, Trans. IRE, CT-2 (1955), 302.

第3章

这一章的内容是网絡理論的基础知識。§ 20 是 Cauer 的电抗四端网絡綜合方法，詳細的証明可参看他的原著❶。这里只讲了給定阻抗矩陣的綜合方法，应注意这种方法同样能用于电抗四端网絡的导納矩陣。此外，Piloty❷ 还給出了电抗四端网絡鎖联矩陣

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的必要和充分条件为

(1) A, B, C 和 D 都是实系数的有理函数，A 和 D 是 λ 的偶函数，B 和 C 是 λ 的奇函数。

(2) $AD-BC\equiv 1$。

(3) $A+B+C+D$ 在 λ 的右半閉平面上沒有零点。

綜合的方法也是利用图 19.1，图 20.4 和图 20.5 等网絡的鎖联。(20.9)这些公式的推导，参看上列 Piloty 的論文，更容易理解。

第4章

这一章主要是 Zobel 和 Cauer 的結果，内容比較陈旧。按譯者管見，讀者不一定要在影象参数理論上化太多时間。

第5章

与影象参数理論比較，工作参数理論似乎更实用，理論更完

---

❶ W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd I, 2te Auflage, Berlin, Akademic Verlag, 1954; Bd II, Berlin, Akademic Verlag, 1960.

❷ H. Piloty: Kanonische Kettenschaltungen für Reaktanzvierpole mit vorgeschriebenen Beitriebseigenschaften, T.F.T., 29(1940), Heft 9, 10, 11; Über die Realisierbarkeitssätze der Kettenmatrix von Reaktanzvierpolen, T. F. T., 30 (1941), 217～223.

美。这一章內，讀者可以仔細体会 Cauer 如何由給定的电抗四端网絡的 S_b，M 或 N 求出阻抗矩陣或导納矩陣，从而用第 3 章的方法把网絡綜合出来。Cauer 又按滤波器的要求适当地規定了特性函数 φ，得出了目前較完善的工作参数滤波器設計理論❶。

1955 年，閔乃大証明損耗四端网絡的工作傳輸函数总可以用无互感的損耗四端网絡实現出来❷，且給出了实現方法。对于任意的四端网絡，还需要继續研究它們的实現方法。

第 6 章

网絡理論中，逼近問題是一个重要問題，同时又是数学領域內逼近理論的直接应用。网絡理論內，按照网絡的特性是用頻率函数还是用时間函数来描述的，就有頻率域的逼近和时間域的逼近之分。頻率域和时間域虽然以 Fourier 变換关联起来，但是它們的逼近誤差之間的关系是一个中心問題。1954 年 Winkler 对于网絡的逼近理論作了綜述❸，讀者可以从他列出的 240 篇文献中找到关于这方面的討論。在頻率域上，值得注意电位模拟的方法❹以及 Darlington 的 Tschebyscheff 多項式級数的方法❺；在时間

❶ 可参看上頁脚注中 W. Cauer 的书和 R. Saal and E. Ulbrich: On the Design of Filters by Synthesis, Trans. IRE, CT-5(1958), 284~327; 及 R. Saal: Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe, Frequenz, 15(1961) Nr. 4, 111~121 以及 V. Fetzer: Die numerische Berechnung von Filterschaltungen mit Tschebyscheffschem Verhalten der Betriebsdämpfung nach der Methode von W. Cauer, A. E. Ü., 6 (1952), 419~431.

❷ 閔乃大: 綫性网絡中預給工作遞輸函数由損耗网絡元素実現的理論，科学出版社，1957.

❸ S. Winkler: The approximation problem of network synthesis, Trans. IRE, CT-1, 3(1954), 5~20.

❹ 参看 A. R. Boothroyd: Design of Electric Wave Filters with the Aid of the Electrolytic Tank, Proc. IEE, IV, 98(1951). S. Darlington: The Potential analoque method of Network synthesis, B. S. T. J., 30(1951), 315~365.

❺ 参看 S. Darlington: Network Synthesis using Tschebycheff polynomial Series, B. S. T. J., 31 (1952), 613~665.

域上，应注意正交函数的方法❶。此外，即使有了逼近理論，实际应用时还是离不了精确的計算，所以电子数字計算机在网絡理論上的应用是不容忽視的❷。

第7章

这一章叙述的特殊四端网絡理論，虽然是一般四端网絡理論的特殊或推广情况，但由于存在它們独特的条件或限制，这些理論仍在网絡理論中占重要地位。

关于 *RC* 网絡，除了书內談的 Guillemin 和尾崎的工作外，譯者认为还可以注意 Fialkow 和 Gerst 的工作❸以及 Dasher 的工作❹。此外，林在旭曾对 *RC* 四端网絡的工作傳輸函数提出必要条件，且討論了 *RC* 网絡的影象参数理論和鏈联实現法。

本书作者池野曾在分布参数网絡，特别是书內所談的分布参数网絡上，进行过一些研究，他曾利用这种理論实际設計了超高頻波段的滤波器❺。

第二篇

这一篇基本上是大野克郎本人工作的重写，請参看他的

---

❶ 参看李郁荣：Statistical Theory of Communication, John Wiley & Sons, Inc. 1960 及 Synthesis of electrical networks by means of the Fourier transforms of Laguerre's functions, J. M. P., 11(1932), 83～113.

❷ 参看 T. R. Bashkow and C. A. Desoer: Digital computers and Network theory, IRE WESCON Conv. Rec., 1957, pt. 2, 133～137 及 Trans. IRE, CT-8 Sept. 1961, 用計算机設計网絡专集。

❸ A. D. Fialkow and I. Gerst: The Transfer Function of an *RC* Ladder Network, J. M. P., 30(1951), 49～72.

❹ B. J. Dasher: Synthesis of *RC* Transfer functions as unbalanced two terminal-pair networks, Trans. IRE, PGCT-1(Dec. 1952), 20～34. 还可参看 E. A. Guillemin: Synthesis of passive Networks, John Wiley & Sons., New York ,1957.

❺ 池野信一：分布参数滤波器的一种設計理論，电气通信学会杂志，35(1952), 544～549 及分布参数网絡的合成，电气通信学会杂志，42(1959), 585～591.

原著❶。

最后，总觉得本书內沒有介紹网絡拓扑方面以及有源网絡綜合方面的成就是一个不足。有关这两方面以及网絡理論其他方面的最近进展，讀者可参閱 Cauer 的书❷及 Weinberg 的綜合性文章❸。

---

❶ 大野克郎，安浦龟之助，按照 s 矩陣的一般多端网絡的构成理論，电气通信学会杂志，36(1953)，564～570； 大野克郎，Application of Scattering Matrices to the Synthesis of n Ports, Trans. IRE, CT-3 (1956), 111～120.

❷ Cauer, Synthesis of Linear Communication Networks, Vol. I, II, McGraw-Hill Co., 1958, 附录 5.

❸ 見第 3 頁脚注❺。

序

网絡理論受到两方面的关心，一方面是直接处理网絡本身的电工程、通信工程和控制工程，另一方面是数学，数学上感兴趣的是它的应用。无論从哪方面看，网絡理論和其他应用数学有所不同。它不仅提供了机器設計的手段，且能把机器引导出来。网絡的直观和网絡的解释也象几何学的直观和几何学的解释一样，可以在数学研究上发揮重要的作用。

撰写本书时，考虑到网絡理論的上述特点及其广泛的应用，所以重点在于闡明基础概念和系統讲述，同时亦收集了最近的成果，留意了发展的方向。第一篇討論网絡的基础概念和应用上最感兴趣的傳輸四端网絡的函数論設計方法，第二篇作为网絡理論核心，叙述多端网絡綜合理論和与此有关的等效网絡理論。关于网絡的問題，还有自动控制的网絡和立体网絡等等。前者在本丛书的另一本內討論；后者由于篇幅的限制，只能割爱，对于这种网絡，在它們本部門內說明，相信会足够理解的。

由于水平的限制，我們很担心本书能否滿足讀者的期望，希望批評指正。

作 者 1957年3月

目　录

出版說明

譯者序

序

第一篇　基础理論和傳輸四端网絡的設計理論 …… 1

第1章　緒論 …… 1

§1　网絡理論的意义和发展 …… 1

§2　网絡的基础概念 …… 2

§3　网絡的分类 …… 4

§4　綫性网絡的性质 …… 6

第2章　二端网絡 …… 14

§5　阻抗和导納 …… 14

§6　基本元件 …… 15

§7　集中参数网絡 …… 17

§8　能量原理和正实函数 …… 18

§9　倒量网絡和补量网絡 …… 25

§10　电抗函数 …… 26

§11　Hurwitz 多項式 …… 28

§12　RL 和 RC 网絡 …… 31

§13　二端网絡的綜合 …… 32

第3章　四端网絡 …… 40

§14　四端网絡 …… 40

§15　四端网絡的表达方法 …… 41

§16　傳輸系数 …… 44

§17　影象参数 …… 46

§18　四端网絡的結合 …… 48

§19　簡单的四端网絡及其变換……49
§20　电抗四端网絡……52
第4章　影象参数理論……57
§21　电抗四端网絡的影象参数……57
§22　定 K 型和 m 誘导型方法……60
§23　对称和反对称滤波器……62
第5章　工作特性理論……66
§24　工作傳輸系数的性质……66
§25　电抗四端网絡的傳輸系数……68
§26　在二端网絡綜合理論上的应用……73
第6章　逼近理論……74
§27　逼近的意义和方法……74
§28　Fourier 級数……74
§29　位論的应用……76
§30　滤波器……79
§31　頻率变換……86
§32　延迟网絡……87
§33　时間域上的逼近理論……89
第7章　特殊网絡……94
§34　RC 网絡……94
§35　分布参数网絡……97
§36　非互易网絡……103
第二篇　多端网絡理論……107
第8章　基础理論……107
§37　緒論……107
§38　理想变压器网絡和綫性变换……112
§39　电阻多端网絡的綜合……114
§40　正实矩陣……115
§41　电抗 $2n$ 端网絡的綜合……120
§42　$2n$ 端网絡綜合的概要……120

第9章 多端网絡和 S 矩陣 ……125
§43 有关 S 矩陣的基本定理 ……125
§44 滤波器和 S 矩陣 ……128
§45 全通网絡 ……129
§46 利用 S 矩陣的 $2n$ 端网絡綜合法 ……130
§47 非互易 $2n$ 端网絡 ……139
参考文献 ……141

第一篇[1] 基础理論和傳輸四端网絡的設計理論

第1章 緒　　論

§1 网絡理論的意义和发展

网絡理論，簡单地說，就是电网絡的响应特性的学問。它的数学內容，极少說只在电网絡中有意义。换言之，如果关于电流和电压的語言各用力和速度或热量和温度等代替，則結果在形式上也是成立的。这相当于 D. Hilbert 在几何学中把点、直綫、平面代成桌子、椅子、黑板的构成。可是，温度的情形另作别論，力和速度，特别是音压和速度的情形，不仅在語言上有形式的对应，而且有物理实体的对应。因此，常采用机械系統的等效电网絡的概念，网絡理論不仅在电工程中，而且在极广泛的应用領域中都在发展。这反映了网絡理論作为数学的一个分支有着广闊的前途。

网絡理論是和电通信技术的发展一起成长起来的。电报或电話的通信距离愈益增长，結果使綫路費用大大增加，为了經济地利用这种价格高昂的綫路，才开始对信号的傳輸进行了系統的研究，由于这一环，就建立了現在的网絡理論。历史上，Kelvin 爵士关于海底电纜傳輸电报符号的研究，代表了一維連續体上波的傳播研究的开始，其后进入这种模型的集中参数网絡的研究，但到現在，却把集中参数时間不变的网絡当作理論体系的基础。

另一方面，又从网絡分析发展到网絡綜合，从互易网絡发展到非互易网絡，从綫性网絡到非綫性网絡，从无源网絡到有源网絡以

[1] 第一篇由池野执笔。

及向更一般方向发展。

§2 网絡的基础概念

給定了一个含有导体的物理系統內部的电磁情况，利用边界条件和初始条件进行計算，求出这导体上流动的电流分布，这是电磁学的問題。可是，这种系統可分成全用理想的导綫❶联接起来的若干部分，各部分除了有流过这种导綫的电流以外，假定沒有其他能量上的交換。在考虑这种系統的問題时，网絡理論不涉及各部分的內部現象，只着重討論流过各导綫的电流的相互关系。这里已經不出現与空間坐标有关的偏微分方程，而只有时間的函数，至多是可数个变量之間的关系問題，这和力学中质点或剛体等問題有点相似。研究电流的相互关系时，单靠电流来描述网絡的現象，实际上是极不方便的，在力学中，除速度以外，还有力的概念。同样，現在采用另一个量**电压**。它和电流的乘积即为**功率**，是表示单位时間內能量移动的一个量。

上述的部分系統叫作(**网絡**)**元件**，它的內部不是网絡理論的討論对象，它的性质仅通过和外面联接的导綫观測到的現象規定出来。例如，天綫可以考虑为在其內部包函电波輻射空間、反射体等具有两条接綫的元件。可是，对于普通的网絡，不是指如此一般的东西，只限于象第2章所述的称为基本元件的几种元件。

为了使网絡中的电流流动，必須具有电流之源。这称为**电源**❷。还有一种元件，它为了实际使用，能使加入的信号电流的能量变成其他形式，例如变成声波能量，这种元件通常称为**負載**。在

❶ 理想的导綫是从它的一端傳送电流至另一端时沒有能量損失也沒有延迟的导綫。

❷ 电源的名称是对电力关系的网絡而言，此时有能量傳輸的問題；对于通信关系的网絡，主要是电流的时間变化即波形問題，此时叫作信号源更为恰当。这种意义下的电源，必須和下节所述的作为能源的有源元件相区别。

图 2.1 内，除电源和負載外，剩下部分是将信号电流从电源傳輸至負載。网絡理論主要是处理这一部分。电源、負載等与外部电路联接的点称为**端子**。

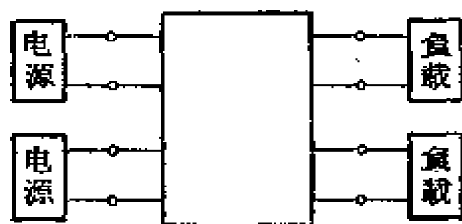


图 2.1

网絡理論主要涉及两类問題，其一是在性质已知的若干元件接成一个型式以后，要求表明整个特性的**分析**問題，其另一是反过来，为了得出給定的特性，要求决定什么样的元件和什么样的联接方法的**設計**問題。对于后者，又分为要求决定滿足实现条件的，且逼近給定特性的、适当次数的网絡函数的**逼近理論**，和由此决定网絡构造的**綜合理論**。

虽然給定了特性，但与此对应的网絡构造实际上不止一种，而有无数多种，由这种端子所見的性质相同但构造不同的网絡，称为**等效网絡**。关于等效网絡的理論，讀者可参考本书的第二篇。

构成网絡理論时，它的基本原理是下述的 **Kirchhoff 法則**、**因果律**、**能量原理**三种。其中 Kirchhoff 法則是关于网絡联接型式的法則，即表示出几何学方面的規律；后两者規定电流和电压之間关系的函数在函数論上的性质。

(i) **Kirchhoff 法則** 它包括两个法則。

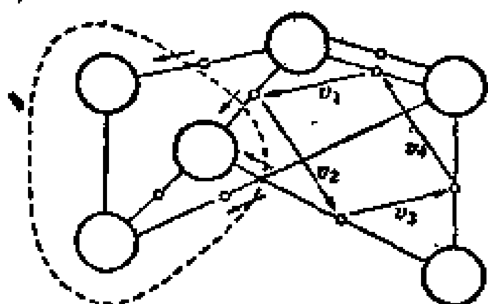


图 2.2

法則 1 ——汇集在分歧点上的电流之和等于零(或者取一般的如图 2.2 所示的包圍网絡一部分但不与元件相交的一个閉曲面，則通过与这个曲面相交的导綫流入曲面内的电流之和等于零)。

法則 2 ——繞任意閉路一周的电压之和等于零(例如在图 2.2 中，$v_1+v_2+v_3+v_4=0$)。

(ii) **因果律**　这就是所謂“原因必須比結果在先”的根本原理，又若网絡状态不改变，則可表成更强的形式“同一原因給出同一結果”。

(iii) **能量原理**　对于內部沒有能量源的网絡，由此取出的能量不能大于过去加入的能量。这对于以后要讲的无源网絡，是一个重要的原理。

§3 网絡的分类

网絡的范圍极为广泛，把它包括在一个理論体系内并不容易。因此，以下有各种观点的分类，并說明本书中討論的网絡范圍。

1) **不变的网絡和可变的网絡**　为了簡单起見，只叙述輸入和輸出不多于一个的情况，但同样也可考虑多个輸入和輸出的情况。設輸入为 $i(t)$ 时輸出为 $v(t)$，如果輸入为 $i(t+t_0)$ 时，輸出成为 $v(t+t_0)$，則这种网絡叫作不变的网絡，否則叫作可变的网絡。本书討論的只是前者。

2) **綫性网絡和非綫性网絡**　設輸入为 $i_1(t)$ 时輸出为 $v_1(t)$，輸入为 $i_2(t)$ 时輸出为 $v_2(t)$，若对于輸入 $a_1i_1(t)+a_2i_2(t)$，輸出为 $a_1v_1(t)+a_2v_2(t)$，即迭加原理成立，則这种网絡叫作綫性网絡，否則叫作非綫性网絡。本书只考虑前者。后者的理論很复杂，即使很簡单的情况，也不一定解得出来。

3) **无源网絡和有源网絡**　象电子管、半导体等元件，具有能量源，当傳輸信号之际，由它們加入能量，这种元件称为有源元件，含有有源元件的网絡称为有源网絡，不包含有源元件的叫作无源网絡。本书只討論后者。

4) **互易网絡和非互易网絡**[1]　在图 3.1 内，所謂互易定理就

[1] “互易”在英語內是“reciprocal”，也有人采用“可逆”两字。

是"网絡的一个分支❶中加入电动势 v 时,其他一个分支中流有电流 i_2, 反之, 在第二分支中加入同一电动势 v 时, 若第一分支中的电流为 i_1, 則 $i_1=i_2$", 在輸入輸出端子对之間这个定理成立的网絡称为互易网絡, 否則称为非互易网絡。有源网絡和非綫性网絡多半是非互易的,但須注意,无源綫性的网絡亦有非互易的。关于这一点, 将在第 7 章中說明。

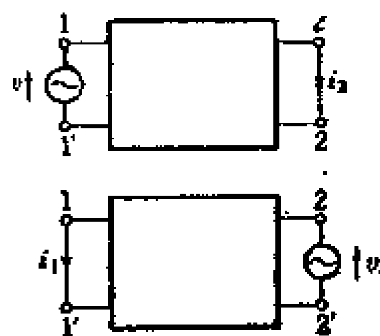


图 3.1

5) 集中参数网絡和分布参数网絡 元件端子上規定了电流和电压的瞬时値以后, 內部状态完全被規定的元件叫作集中参数的元件。例如电阻、电容、电感、理想变压器、理想回轉器 (gyrator), 理想放大器等就是这种元件。有限多个集中参数元件联接所得的网絡称为集中参数网絡, 否則称为分布参数网絡。其中,分布参数网絡多半在較狹的意义上使用着,通常指的是象傳輸綫路那样的可以看成由两种以上无限小集中参数元件連續分布組成的网絡。在本书內,主要討論集中参数网絡,在第 7 章內,我們要簡单地討論一下分布参数网絡。

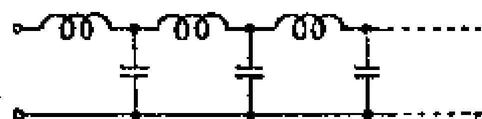
6) 电抗网絡和損耗网絡 不消耗能量的,即輸入的能量必定再能以电流的形式取出的无源网絡叫做电抗网絡, 否則叫做損耗网絡❷。

7) 有限网絡和无限网絡 由有限多个元件組成的网絡叫做有限网絡, 由无限多个元件組成的网絡叫做无限网絡。上述的分布参数网絡,广义上,也可归入无限网絡, 但无限网絡注意的不是那种連續分布的东西, 而是两种以上独立元件的可数无限多个的联接。无限网絡具有很多在有限网絡看来是极为特殊的性质, 例

❶ 参考 §7.

❷ 損耗网絡消耗能量,使它变成热、电波、声波等其他种类的能量散放出来。

如图 3.2 的 L, C 的无限网絡，它可以在某个頻率范圍上与純电阻具有同一性质。再有，一般任意的无源綫性二端网絡（参考下一項）也有含分布参数的元件，对于它們往往存在由两个 LC 无限网絡組合成的等效网絡。其他各种有趣的問題很多，但在本书中都省略了。


图 3.2

3）端子数目上的分类　按照与外部联接的端子数目，网絡又可分为二端网絡、三端网絡、四端网絡、…等等，三端以上的网絡統称为多端网絡。一个网絡和外部联接至少需要两个端子，通过这两个端子的电流是大小相等方向相反的。实际上使用的多端网絡多半如图 3.3 所示，各个端子都是两两成对，各对的两个电流是大小相等方向相反。这种网絡称为**傳輸多端网絡**，否則称为**完全多端网絡**。完全多端网絡之中，如果如图 3.4 能分出一个端子，其他的端子和它构成各个对，那末也可以作为傳輸多端网絡来考慮。傳輸多端网絡不仅在实际上使用較多，并且由于理論上这种形式比較方便，所以下面談到多端网絡，就是指这一种。

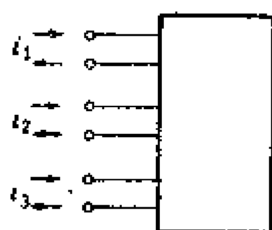
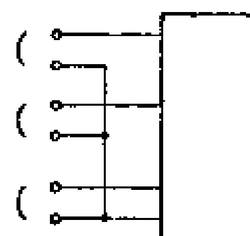


图 3.3


图 3.4

§4 綫性网絡的性质

1）脉冲响应　这一节討論的內容，与网絡內部构造无关，只是建立輸入和輸出之間的关系。首先，我們作一个假定。即网絡在无限过去是絕对靜止的。当然，在无限过去，輸入也必須为零。这个假定使网絡的初始条件簡单地成为一个，而不必一一說明，处理起来就比較方便。以后，也可以考虑无限过去不为零的信号，但限于以零为极限的情况。

現在設 $i(t)$ 为輸入，$v(t)$ 为輸出。这个 $i(t)$ 和 $v(t)$ 究竟表示电流或电压是沒有区别的。更广泛地說，也可代表速度和力那样的一般物理变量，主要是表示原因和結果两个量。

首先，由于网絡是綫性的，对于輸入 $i_1(t)$，$i_2(t)$，…，若輸出是 $v_1(t)$，$v_2(t)$，…，則对于輸入

$$i(t)=\sum a_\nu i_\nu(t),$$

輸出成为

$$v(t)=\sum a_\nu v_\nu(t).$$

这还能够推广到連續参数，对于

$$i(t)=\int a(\tau)i_\tau(t)d\tau, \tag{4.1}$$

輸出可写成

$$v(t)=\int a(\tau)v_\tau(t)d\tau. \tag{4.2}$$

利用这个关系和适当的函数集 $i_\tau(t)$，如果能求出輸出 $v_\tau(t)$，則对于任意的輸入 $i(t)$，由上式求出展开系数 $a(\tau)$ 后，就能計算輸出。就是說，网絡的輸入和輸出的关系，被一系列的函数 $i_\tau(t)$ 和 $v_\tau(t)$ 規定出来。

这里注意网絡的不变性。对于 $i(t)$ 如果輸出是 $v(t)$，則由于輸入为 $i(t-\tau)$ 时輸出为 $v(t-\tau)$，所以上述的 $i_\tau(t)$ 如果是在时間 t 上平移，那末相应的輸出函数也只是在时間上作了一个平移。于是只要有一个輸入和輸出关系就完全規定了全部关系。最方便的輸入函数是脉冲函数。脉冲函数 $\delta(t)$ 的定义：对于任意的正的 ε，都有

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt=1. \tag{4.3}$$

利用这个定义，任意的函数就可表成

$$i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}i(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

亦就是，如果取展开系数为 $i(\tau)$ 本身，对于 $\delta(t)$，輸出为 $k(t)$，則

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty} i(\tau)k(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} i(t-\tau)k(\tau)\,d\tau. \qquad (4.4)$$

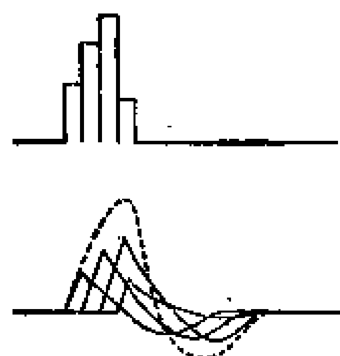


图 4.1

在图 4.1 内，考慮輸入 $i(t)$ 是由許多窄脉冲合成，并且輸出由各个脉冲的輸出所合成。这个 $k(t)$ 通常称为**脉冲响应**❶。如果因果律成立，則結果不能比原因在先，但最初假定无限过去时网絡处在静止状态，故必須有

$$k(t)=0 \quad (t<0). \qquad (4.5)$$

因此，(4.4)的积分范圍变成 $(-0, \infty)$。(以下为了簡单起見，把 -0 簡单地写成 0。)

在网絡中，通常还要求知道**稳定**的条件。簡单地說，就是对于有限的輸入，不能出現无限大的輸出。比較严格地說，就是对于一个正常数 M_1，如果

$$|i(t)|<M_1 \quad (t<t_0),$$

則存在另一个常数 M_2，

$$|v(t)|<M_2.$$

在不稳定的网絡中，只要有象杂音那样的微小信号，就可使輸出变成无限大，作为傳輸网絡，这是不适用的。

网絡为稳定的必要和充分条件是

$$\int_0^{\infty}|k(t)|\,dt<\infty. \qquad (4.6)$$

实际的无源网絡都是損耗性的，根据能量原理它們总是稳定的。理想的电抗网絡不滿足这个条件。可是，$i(t)$ 若为連續函数，对于任意的正的 σ，如果

❶ $k(t)$ 可以用积分 $h(t)$ 代替，則表成 $v(t)=\int i(t-\tau)\,dh(t)=\int h(t-\tau)\,di(t)$. $h(t)$ 为对于单位阶梯函数的响应，叫作过渡导納 (indicial admittance).

$$|i(t)|<M_1e^{\sigma t}\quad(t<t_0),$$

则存在一个 M_2,

$$|v(t)|<M_2e^{\sigma t},$$

这是准稳定的情况。

2) 正弦波和频率特性 作为(4.1)的函数，比較簡单的一个是正弦波。可是，卽使是正弦波，也有 $\sin\omega t$ 或 $\cos\omega t$ 的形式，不很方便，所以通常取复数形式

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t, \tag{4.7}$$

实际的信号是它的实部，或者考虑 $e^{j\omega t}$ 和 $e^{-j\omega t}$ 同时存在更为方便。可是，对于 $e^{j\omega t}$，根据(4.4)，輸出是

$$v(t)=\int_0^\infty e^{j\omega(t-\tau)}k(\tau)d\tau=K(j\omega)e^{j\omega t},$$

其中

$$K(j\omega)=\int_0^\infty k(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau. \tag{4.8}$$

对于 $e^{j\omega t}$ 的实部的輸出，卽实际的輸出，就是这个 $v(t)$ 的实部。

但由于

$$K(j\omega)e^{j\omega t}=|K(j\omega)|e^{j(\omega t+\theta)},$$

其中 $$\theta=\arg K(j\omega),$$

所以对于正弦波，輸出仍是正弦波，只是幅度是輸入的 $|K(j\omega)|$ 倍，相位移动了 θ。这是綫性网絡的特征，这个 $K(j\omega)$ 称为**频率特性**，$|K(j\omega)|$ 称为**幅度特性**，$\arg K(j\omega)$ 称为**相位特性**。由于(4.8)卽是所謂 Fourier 变换式，按照 Fourier 反变换，由 $K(j\omega)$ 便能得出脉冲响应。

$$k(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty K(j\omega)e^{j\omega t}dt. \tag{4.9}$$

现在就能对任意輸入信号 $i(t)$ 求輸出，假定

$$\int_{-\infty}^\infty i(t)^2dt<\infty,$$

取 Fourier 变换

$$I(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t}dt,$$

即

$$i(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

則輸出变成

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)I(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

或者，若将 $v(t)$ 的 Fourier 变換写成 $V(j\omega)$，則

$$V(j\omega)=K(j\omega)I(j\omega). \tag{4.10}$$

这个式子，代替了輸入和輸出的时間函数，以頻率函数的形式表出了此时的关系。和(4.4)式相比，它是用信号的頻率分量来处理信号，这就把問題簡化了。

3) 傳达函数 上一节內考虑了对于正弦波的輸出，也可以进一步考虑依指数函数增大的正弦波。即設 $\lambda=\sigma+j\omega$（它叫作复数頻率），取輸入为

$$e^{\lambda t}=e^{\sigma t}(\cos\omega t+j\sin\omega t), \tag{4.11}$$

对它求輸出，

$$v(t)=K(\lambda)e^{\lambda t}, \tag{4.12}$$

其中

$$K(\lambda)=\int_{0}^{\infty} k(\tau)e^{-\lambda t}dt. \tag{4.13}$$

这个 $K(\lambda)$ 是上一节的 $K(j\omega)$ 在复变函数上的推广，它叫作**傳达函数**。上式就是所謂 Laplace 变換式，如果在某个 λ_0 收斂，則对于 $\mathrm{Re}\lambda>\mathrm{Re}\lambda_0$ 的 λ 也是收斂的，在这个区域上，它是正則函数。如果网絡是稳定的，則由于在 $\lambda=0$ 时絕对收斂，所以在域 $\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0$ 上，即在复数 λ 平面的右閉半平面❶內，这是一个正則函数。$K(\lambda)$

❶ 右半平面再加上虛軸叫作右閉半平面。

的正則性，使 $k(\tau)$ 对于負的 τ 都成为零，就是說基于因果律的。

可是已經讲过，純电抗网絡必定不滿足稳定条件。但若有一个无源网絡，对它加入一个依指数增大的正弦波，則輸出必然是确定的。亦就是說，"无源网絡的傳达函数在右半平面上是单值正則的"。一般也能把傳达函数解析开拓到(4.13)式不收斂的区域，可是应注意，在这个区域上函数已不是单值的了，但无論如何，傳达函数在整个平面上除一些奇点外都是有定义的。对于具有左半平面內复数頻率的信号，由于在无限过去时具有无穷大的振幅，不滿足最初所述的假定，所以不能用它来进行討論。

在左半平面內，如果有(4.13)式的收斂域，則可得出(4.12)式所示的輸出，但对于不收斂区域的輸入，輸出一定不存在。在某一时刻，若能选擇以(4.11)式表示的輸出状态，則在以后通常也得出同样的輸出，如果在最初稍为差一点，則誤差的比例一般将随时間而增大。在这个意义上講，对于这样的輸入，考虑无限的过去是沒有意义的。

4) 实部与虛部的关系 为了表示网絡的傳輸特性，如果有脉冲响应，那末只要一个实函数 $k(t)$ 就可以解决，表成頻率特性 $K(j\omega)$ 时，虽然需要实部和虛部两个函数，但事实上，由于这两个函数是一个解析函数的实部和虛部，它們彼此不是独立的❶。

現在設

$$K(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega), \tag{4.14}$$

則

$$k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}R(\omega)\cos\omega t\,d\omega-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}X(\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

由于 $t<0$ 时 $k(t)=0$，所以右边两項相等。因此在 $t>0$ 时，可写出

$$k(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}R(\omega)\cos\omega t\,d\omega=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}X(\omega)\sin\omega t\,d\omega. \tag{4.15}$$

❶ 这个問題可参考第6章§29 位論的应用，且与流体力学、靜电学等二維問題有密切的关系。此外，可参考文献[17]。

又从(4.8)式的实部和虚部可得

$$\left.\begin{aligned} R(\omega) &= \int_0^\infty k(t)\cos\omega t\,dt, \\ X(\omega) &= -\int_0^\infty k(t)\sin\omega t\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

再把以上的 $k(t)$ 代入上式，得出

$$\left.\begin{aligned} R(\omega) &= -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u}{u^2-\omega^2} X(u)du + R(\infty), \\ X(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{u^2-\omega^2} R(u)du. \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

其中积分是取主值。或者为了把极点除去，可写成

$$X(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{u^2-\omega^2}\{R(u)-R(\omega)\}du. \tag{4.18}$$

如果再令变量为 $x=\log(u/\omega)$，則得

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{dR}{dx}\log\coth\frac{|x|}{2}\,dx. \tag{4.19}$$

这里 $\coth|x/2|$ 亦可看成 $|(u+\omega)/(u-\omega)|$，所以上式說明在 $u=\omega$ 附近特别加重 dR/dx 的影响。因此大致地說，R 傾斜大的地方 X 也大。同样可得

$$R(\omega)-R(\infty) = -\frac{1}{\pi\omega}\int_{-\infty}^\infty \frac{d(\omega X)}{dx}\log\coth\frac{|u|}{2}\,du. \tag{4.20}$$

这种关系一般对于右閉半平面內正則的函数常是适用的，对于以后要講的傳輸量函数(即傳达函数的对数再取相反符号的函数)，以及傳达函数，如果它們在右閉半平面內既沒有零点也沒有极点，則因它們在右閉半平面內是正則的，所以这种关系仍能成立。

为了参考起見，我們还写出由正則性求此关系的方法。在右半平面內，由于 $K(\lambda)$ 是正則的，根据 Cauchy 定理，对于右半平面內的 λ，下式是成立的:

$$K(\lambda) = -\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{K(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi + \frac{K(\infty)}{2}. \tag{4.21}$$

但 $-\lambda$ 在左半平面內，

$$0 = -\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{K(\xi)}{\xi+\lambda}d\xi + \frac{K(\infty)}{2},$$

因此得到

$$K(\lambda)=\frac{1}{\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{\lambda K(\xi)}{\lambda^2-\xi^2}d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda R(u)}{\lambda^2+u^2}du. \tag{4.22}$$

由此作出

$$\frac{1}{2}\{K(\lambda)-\overline{K(\lambda)}\}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{\lambda R(u)}{\lambda^2+u^2}-\frac{\bar{\lambda}R(u)}{\bar{\lambda}^2+u^2}\right\}du,$$

設 $\lambda\to j\omega$，則取积分的主値，右边正好和(4.17)的第二式一致。对于第一个式子，同样也能用这种方法导出。

第2章　二端网絡

§5 阻抗和导納

具有两个端子的二端网絡，它的两个端子間的电流 I 和电压 V 的关系是完全确定的。这两者，无論哪一个都可以考虑作为輸入。在把电流作为輸入时，傳达函数

$$Z(\lambda)=\frac{V}{I} \tag{5.1}$$

叫做阻抗，而把电压作为輸入时，傳达函数

$$Y(\lambda)=\frac{I}{V}=\frac{1}{Z(\lambda)} \tag{5.2}$$

叫做导納。或者，为了与以后的傳輸阻抗和傳輸导納区别起見，可分别称它們为策动点阻抗和策动点导納。

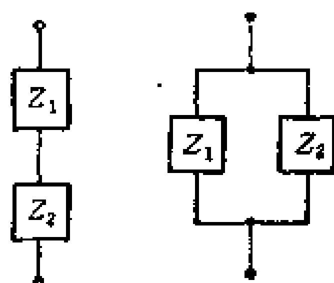


图 5.1　　图 5.2

将两个二端网絡作如图 5.1 那样的联接，合成的二端网絡的阻抗就是

$$Z=Z_1+Z_2. \tag{5.3}$$

这样的联接称为串联。若将两者作如图 5.2 那样的联接，则

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}. \tag{5.4}$$

这种联接称为并联。由串联和并联作成的电路的阻抗，可以反复利用以上的演算，簡单地求出来。但对于一般的网絡，可以利用 Kirchhoff 的两个法则算出。于是，合成网絡的阻抗可以表成各个部分网絡阻抗的有理式(参考 §7)。如果部分网絡不是二端网絡，那末考虑以后要讲的傳輸阻抗，也有同样的結果。这样，合成网絡的网絡函数就簡单地表成了頻率的函数，这是一个很大的方便，但

对于脉冲响应那样的时間函数，作这种表示是不可能的。

§6 基本元件

网絡元件的种类有很多，从理論上，特别从綜合的观点来看，各种各样的元件全都考虑并不合适。最好是将各种性质理想化，选擇綜合上十分必要的种类，尽量做到与实际接近。这样的元件有下列四种。

（i）**电阻** 这是完全消耗所加能量的、沒有存儲能力的元件，各时刻的輸出完全被該时刻的輸入所規定。即

$$v(t)=Ri(t),$$

由此得出

$$Z(\lambda)=R \quad (\text{实常数})。\tag{6.1}$$

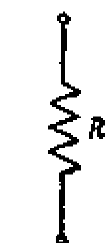


图 6.1

电阻的記号如图 6.1 所示。

（ii）**綫圈** 这是不消耗能量的、能存儲电流的元件❶，即存儲的能量仅是电流的函数。亦就是

$$E=\int vi\,dt=Li^2/2,$$

对 t 导微，可得

$$v=L\frac{di}{dt}$$



图 6.2

的关系。系数 L 称为**电感**。若取 $i=e^{\lambda t}$，則直接可得此时的阻抗为

$$Z(\lambda)=\lambda L.\tag{6.2}$$

綫圈的記号通常如图 6.2 所示。

（iii）**电容器** 这是存儲电压❷的元件。

$$i=C\frac{dv}{dt},$$

---

❶ 正确地說，是存儲磁能。

❷ 正确地說，是存儲靜电能。

这个系数 C 称为**电容**。

$$Z(\lambda)=\frac{1}{\lambda C}. \tag{6.3}$$

它的記号通常如图 6.3。

(iv) 理想变压器　这是不消耗也不存儲能量的只起变换作用的四端元件。在图 6.4 内，它的性质由下列关系所规定：

$$\left.\begin{aligned}V_2&=nV_1,\\ I_2&=\frac{1}{n}I_1.\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

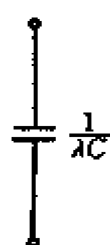


图　6.3

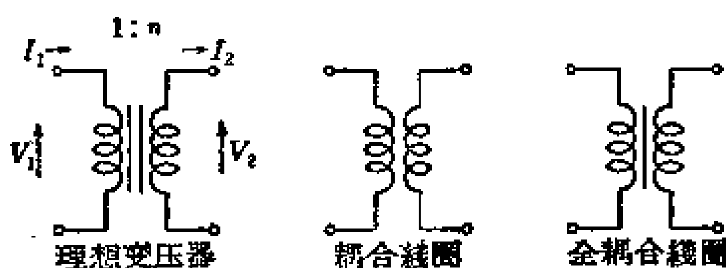


图　6.4

此外，还有**耦合綫圈**。它的性质是

$$E=\frac{1}{2}L_1i_1^2+Mi_1i_2+\frac{1}{2}L_2i_2^2,$$

亦就是，可以表成

$$\left.\begin{aligned}V_1&=\lambda L_1I_1+\lambda MI_2,\\ V_2&=\lambda MI_1+\lambda L_2I_2.\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

M 称为**互感**，由于 E 必須大于零，所以有下列的关系：

$$M^2\leqslant L_1L_2. \tag{6.6}$$

特别在等式成立的情况下，叫作**全耦合綫圈**，如图 6.4 所示。理想变压器就是除满足 $L_2/L_1=n^2$ 的条件外，L_1，L_2 和 M 都趋于无穷大时的全耦合綫圈。另一方面，全耦合綫圈也可以用图 6.5 的理想变压器和电感的等效电路表示出来。

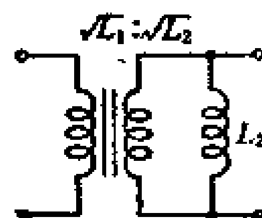


图　6.5

§3 内叙述的集中参数元件就是这四种基

本元件的无源互易組合。因此，用这四种元件的有限多个合成的网絡就是集中参数网絡。于是知道，集中参数网絡的傳达函数是 λ 的实系数有理函数(参考 §7)。

§7 集中参数网絡

由有限多个上节所述的四种元件，即电阻、綫圈、电容器和理想变压器(或耦合綫圈)，联接成的网絡的理論，即集中参数网絡的理論是最完备的理論之一。下面限于討論集中参数的网絡。

网絡是在一些点(节点)之間联接一些串联的元件(支或分支)所成的东西。在这种网絡內求各部分的电流和电压时，可以采用 Kirchhoff 的两个法則。亦就是，把流入各支內的电流当作未知数，根据这个法則列出一些联立方程，这样就可以解出这些未知数。这时，若采用第一法則，即汇集于各节点的电流之和等于零，則适当地选擇电流，可使未知数的数目減少。因此，适当地选擇独立閉路，把环流的电流作为未知数，是方便的。例如在图 7.1 的平面上不交叉的网絡中，就可取各网孔內环流的电流作为未知数。这里还适用第二法則，即环繞閉路一周的电压之和等于零，这个閉路就可取为所考慮的独立电流的閉路。現在，設这种閉路的数目为 n，只在第一閉路內联接电源时，就有❶

图 7.1

$$\left.\begin{array}{l} z_{11}I_1+z_{12}I_2+\cdots+z_{1n}I_n=V, \\ z_{21}I_1+z_{22}I_2+\cdots+z_{2n}I_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n1}I_1+z_{n2}I_2+\cdots+z_{nn}I_n=0. \end{array}\right\} \tag{7.1}$$

❶ 含有理想变压器时，不能这样写，在这种情况下，可以先列出全耦合綫圈的式子，解出以后再令 L_1, L_2 和 M 趋于 ∞。

这种式子叫做**回路方程**。反之，若以各节点的电位作为未知数，根据第一法则列出方程，则可得到一組在上式中以 V 置換 I，以 I 置換 V，以 y 置换 z 的方程。它叫作**节点方程**。根据网絡的型式，哪一种方程方便就可选用哪一种。

(7.1) 中的 z_{ij}，是第 i 閉路和第 j 閉路公共的阻抗，它的符号当 I_i 和 I_j 同方向时为正，反之为負。它可以写成下列形式：

$$z_{ij}=\lambda L_{ij}+R_{ij}+\frac{1}{\lambda C_{ij}}. \tag{7.2}$$

两个閉路之間有互感时，它們被包含在 L_{ij} 中。此时 $z_{ij}=z_{ji}$ 的关系仍旧成立。z_{ii} 为第 i 閉路的全部阻抗。如果解出 (7.1) 式內的 I_1，就可求得接有电源的端子間的二端阻抗：

$$Z(\lambda)=\frac{V}{I_1}=\frac{\Delta}{\Delta_{11}}, \tag{7.3}$$

其中 Δ 是系数 z_{ij} 的行列式，Δ_{11} 是关于 z_{11} 的子行列式，且設 $\Delta_{11}\neq 0$. 由此可知，$Z(\lambda)$ 是 λ 的有理函数。

§8　能量原理和正实函数

对于无源网絡，除了因果律以外，还要加入能量原理的約束条件。現在看它在二端网絡函数上要求有什么样的性质。

从无限过去 $i=0$ 时到时刻 t，加入到二端网絡中的全部能量是

$$E=\int_{-\infty}^{t} v\,i\,dt,$$

对于无源网絡，它不能变成負数。設 $\lambda=\sigma+j\omega\,(\sigma>0)$，現在考虑这种复数频率的信号。由于上式不是綫性的，所以 v 和 i 不能仍用复数形式，必須采用实函数。这里取

$$i(t)=e^{\sigma t}\cos\omega t$$

以及

$$v(t)=|Z(\lambda)|e^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta),$$

其中

$$\theta=\arg Z(\lambda).$$

于是

$$E=\int_{-\infty}^{t}|Z(\lambda)|e^{2\sigma t}\cos\omega t\cos(\omega t+\theta)dt$$

$$=\frac{|Z(\lambda)|e^{2\sigma t}}{2\sigma}\left\{\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\cos(2\omega t+\theta+\varphi)+\cos\theta\right\}. \quad (8.1)$$

为了不使它变成負，必須有

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2}}\leqslant\cos\theta, \quad (8.2)$$

也可把它写成

$$|\arg\lambda|\geqslant|\arg Z(\lambda)|. \quad (8.3)$$

由于 $\sigma=\mathrm{Re}\,\lambda>0$，故 $|\arg\lambda|<\pi/2$. 于是由上式，$\mathrm{Re}\,Z(\lambda)>0$. 这种函数称为正实函数。即

定义 具有下列性质的函数 $Z(\lambda)$ 叫作正实函数：

(i) λ 为实数时，$Z(\lambda)$ 为实数；

(ii) 对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 的 λ，$Z(\lambda)$ 是正则的；

(iii) 对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 的 λ，$\mathrm{Re}\,Z(\lambda)\geqslant0$.

定理 1 阻抗函数是正实函数。

但由于集中参数网絡的阻抗是有理函数，所以下面只限于討論有理函数。

限定为有理函数，定义亦变得簡单了。

定义 具有下列性质的函数 $Z(\lambda)$ 叫作正实函数：

(i) $Z(\lambda)$ 为实系数的有理函数；

(ii) $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 时 $\mathrm{Re}\,Z(\lambda)\geqslant0$.

定理 2 $Z(\lambda)$ 为正实函数的必要和充分条件是

(i) $Z(\lambda)$ 为有理函数；

(ii) $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 时 $|\arg Z(\lambda)|\leqslant|\arg\lambda|$.

这两个条件的充分性是很明显的，但必要性的数学証明比較困难。这可以用(8.1)式所述的能量原理作物理的証明❶。

正实函数在右半平面內正則，但在虛軸上可能有极点。可是，虛軸上的极点必須是一阶的。这是因为例如考虑一个三阶的极点 $a(\lambda-j\omega_0)^{-3}$，在 $j\omega_0$ 附近它的实部的符号如图 8.1(a) 所示，不管如何选擇常数 a，在右半平面內，总有实部为負的区域，但在一阶的情况下，如果留数是正数，那末如图 8.1(b) 所示，实部为負的区域都可以进入左半平面內。由此得出下面的定理。

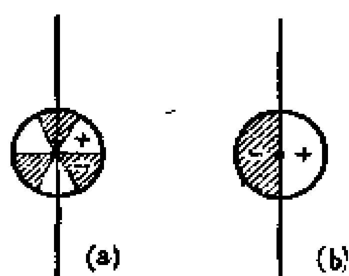


图 8.1

定理 3 $Z(\lambda)$ 为正实函数的必要和充分条件是

(i) $Z(\lambda)$ 为实系数有理函数;

(ii) $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 时 $Z(\lambda)$ 是正則的;

(iii) 在虛軸上，$\mathrm{Re}\,Z(\lambda)\geqslant 0$;

(iv) 虛軸上的极点是一阶的，它的留数是正数。

条件(iv)可以改成下列条件:

(iv′) 虛軸上的零点是一阶的，它的一阶导数是正数。

以上用各种形式叙述了正实函数的条件，正实函数主要是把右半平面映射到右半平面內部区域的实系数有理函数。由此，下列定理是显而易見的。

定理 4 正实函数的正实函数，仍为正实函数。

这个定理将成为 §31 的頻率变換的原理。

系 正实函数的倒数为正实函数。

已經讲过，导納当然也是正实函数，所以这是可以理解的。

定理 5 正实函数之和为正实函数。

---

❶ 例如 R. Nevanlinna: Eindeutige Analytische Funktionen (Julius Springer, Berlin, 1936)。

其次考虑 $Z(\lambda)$ 在虚軸上点 $j\omega_0(\neq 0, \infty)$ 处为純虚数的情况。在附近一点 $\Delta\sigma+j\omega_0$ 上，$Z=\Delta r+jx_0$，由(8.3)可得 $\frac{|x_0|}{\Delta r}\leqslant\frac{|\omega_0|}{\Delta\sigma}$，考虑它的极限，则得出 $\left|\frac{x_0}{\omega_0}\right|\leqslant\frac{\partial r}{\partial\sigma}$。但因为在右半平面内 Z 是正則的，滿足 Cauchy-Riemann 关系

$$\frac{\partial r}{\partial\sigma}=\frac{\partial x}{\partial\omega}.$$

于是

$$\left|\frac{x_0}{\omega_0}\right|\leqslant\frac{\partial x}{\partial\omega}.$$

亦即得出

定理 6 如果正实函数 $Z(\lambda)$ 在虚軸上的正則点 $j\omega_0(\neq 0, \infty)$ 处是純虚数，則

$$\left\{\frac{dZ(\lambda)}{d\lambda}\pm\frac{Z(\lambda)}{\lambda}\right\}_{\lambda=j\omega_0}\geqslant 0. \tag{8.4}$$

等号只在 $Z(\lambda)=L\lambda$ 或 $Z(\lambda)=1/C\lambda$ 时成立(L 和 C 是正的常数)。同样有

定理 7 若 $Z(\lambda)$ 是正实函数，則对于正的实数 λ，

$$\frac{Z(\lambda)}{\lambda}\pm\frac{dZ(\lambda)}{d\lambda}\geqslant 0. \tag{8.5}$$

等号只在 $Z(\lambda)=L\lambda$ 或 $Z(\lambda)=1/C\lambda$ 时成立。

由此得到下列关系：

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{Z(\lambda)}{\lambda}\right\}\leqslant 0,\quad \frac{d}{d\lambda}\{\lambda Z(\lambda)\}\geqslant 0, \tag{8.6}$$

于是又得到下一个定理。

定理 8 若 $Z(\lambda)$ 为正实函数，$Z(0)\neq 0$，$Z(\infty)\neq\infty$，則对于任意的正数 L，常存在一个并且只有一个 λ 的正实根，滿足

$$Z(\lambda)=\lambda L.$$

其次，考虑虚軸上有极点的情况，由于 $Z(\lambda)$ 是实系数的函数，如果 $j\omega_1$ 是一个极点，$-j\omega_1$ 必須也是极点。取这种极点的主部，成为

$$\frac{h_1}{\lambda-j\omega_1}+\frac{h_1}{\lambda+j\omega_1}=\frac{2h_1\lambda}{\lambda^2+\omega_1^2}\quad (h_1>0). \tag{8.7}$$

特别当极点在原点和无穷远点的情况下，它們分別为

$$\frac{h_0}{\lambda},\quad h_\infty\lambda\quad (h_0, h_\infty>0).$$

由于它們在整个虚軸上是純虚数，所以把它們从 $Z(\lambda)$ 中減去，剩下的仍为正实函数。这样可以导出一个在虚軸上沒有极点的正实函数。我們称这种函数为最小电抗型的。

如果 $Z(\lambda)$ 的实部在虚軸上的最小值是 R_0，則 $Z(\lambda)-R_0$ 仍是正实函数。我們称它为最小电阻型的。

根据§4所述，虚軸上沒有极点的正实函数完全由它在虚軸上的实部所决定。亦就是若 $Z(j\omega)$ 的实部为 $R(\omega)$，則

$$Z(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda R(\omega)}{\lambda^2+\omega^2}\,d\omega\quad (\mathrm{Re}\,\lambda>0). \tag{8.8}$$

可是，它的被积函数完全和(8.7)式同一形式。这意味着 $Z(\lambda)$ 可表成虚軸上連續的极点分布的形式，亦暗示它可以实現成电抗的无限网絡。这种表达还可写成如下的 Stiltjes 积分形式，推广到虚軸上含有极点的情况。

$$Z(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda d\Phi(\omega)}{\lambda^2+\omega^2}\quad (\mathrm{Re}\,\lambda>0). \tag{8.9}$$

$Z(\lambda)$ 为有理函数时，考虑偶部比考虑实部更方便。即考虑

$$G(\lambda)=\{Z(\lambda)+Z(-\lambda)\}/2, \tag{8.10}$$

且有

$$G(j\omega)=R(\omega). \tag{8.11}$$

这里可以举出下列的定理。

定理 9 $G(\lambda)$ 为正实函数的偶部的必要和充分条件是

(i) $G(\lambda)$ 为实系数偶有理函数；

(ii) 虚軸上沒有极点；

(iii) 虚軸上 $G(\lambda)\geqslant 0$.

这里不去証明它了。但 $G(\lambda)$ 是有理函数，所以求 $Z(\lambda)$ 时也可不采用(8.8)的积分，而将 $G(\lambda)$ 展成部分分式，分开左右半平

面的极点，

$$G(\lambda)=\sum\frac{h_\nu}{\lambda+\lambda_\nu}+\sum\frac{-h_\nu}{\lambda-\lambda_\nu}+R_0\quad(\mathrm{Re}\,\lambda_\nu>0),\tag{8.12}$$

于是就可簡单地求出 $Z(\lambda)$：

$$Z(\lambda)=\sum\frac{2h_\nu}{\lambda+\lambda_\nu}+R_0。\tag{8.13}$$

下面我們来讲与正实函数有重要关系的 S 函数。

定义 $Z(\lambda)$ 为正实函数时，作綫性变换后的函数

$$S(\lambda)=\frac{Z(\lambda)-R}{Z(\lambda)+R}\quad(R\text{ 为正的实常数})\tag{8.14}$$

称为 S 函数[1]。反之，$Z(\lambda)$ 可表成

$$Z(\lambda)=R\,\frac{1+S(\lambda)}{1-S(\lambda)}.\tag{8.15}$$

由这两个式子可知，

$$\mathrm{Re}\,Z(\lambda)\geqslant 0\quad\text{和}\quad|S(\lambda)|\leqslant 1$$

是完全相当的条件。因此得到

定理 10 一个实系数有理函数 $S(\lambda)$ 为 S 函数的必要和充分条件是：

$$\text{对于 }\mathrm{Re}\,\lambda>0,\quad |S(\lambda)|\leqslant 1.$$

还有，

定理 11 一个实系数有理函数 $S(\lambda)$ 为 S 函数的必要和充分条件是：

（i）在右半平面内正则；

（ii）在虚軸上，$|S(j\omega)|\leqslant 1$。

由此很容易証明下列的定理。

定理 12 S 函数 $S(\lambda)$ 若在正的实軸上一点 λ_0 处有一个零点，则

---

[1] 它相当于第二篇中一阶的 S 矩陣。

$$S_1(\lambda)=\frac{\lambda+\lambda_0}{\lambda-\lambda_0}S(\lambda) \tag{8.16}$$

也是 S 函数，特别当 $-\lambda_0$ 是 $S(\lambda)$ 的极点时，$S_1(\lambda)$ 比 $S(\lambda)$ 次数低一次。

定理 13 S 函数 $S(\lambda)$ 若在右半平面内有零点 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$（复数零点以共轭对出现），则

$$S_1(\lambda)=\frac{\prod^t(\lambda+\lambda_\nu)}{\prod^t(\lambda-\lambda_\nu)}S(\lambda) \tag{8.17}$$

仍为 S 函数，如果 $S(-\lambda_\nu)=\infty\ (\nu=1,2,\cdots,t)$，则 $S_1(\lambda)$ 比 $S(\lambda)$ 低 t 次。

可是，由此还可得到下列关系：

$$S_1(\lambda)S_1(-\lambda)=S(\lambda)S(-\lambda). \tag{8.18}$$

如果 $S_1(\lambda)$ 或 $S(\lambda)$ 各用(8.15)的 $Z_1(\lambda)$ 或 $Z(\lambda)$ 代替，则可得出与定理 12 和 13 对应的下列定理。

定理 14 (Richards 定理)❶ 設 $Z(\lambda)$ 是正实函数，λ_0 为一个正的实数，则

$$Z_1(\lambda)=Z(\lambda_0)\frac{\lambda Z(\lambda)-\lambda_0 Z(\lambda_0)}{\lambda Z(\lambda_0)-\lambda_0 Z(\lambda)} \tag{8.19}$$

仍为正实函数，特别在

$$Z(\lambda_0)+Z(-\lambda_0)=0$$

时，$Z_1(\lambda)$ 比 $Z(\lambda)$ 低一次，否則是同一次数。

定理 15 設 $Z(\lambda)$ 是正实函数，在右半平面内 t 个点 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 上（若有复数点，則必須包含它的共軛复数点），

$$Z(\lambda_\nu)=C\quad(\nu=1,2,\cdots,t)\quad(C\ 为正的实常数),$$

則取

---

❶ 参阅 Richards, P. I., A special class of functions with positive real part in a half plane, Duke Math. J., 14 (1947), 777~786.——譯者注

$$Z_0(\lambda)=\frac{\prod_{\nu=1}^{t}(\lambda+\lambda_\nu)+\prod_{\nu=1}^{t}(\lambda-\lambda_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{t}(\lambda+\lambda_\nu)-\prod_{\nu=1}^{t}(\lambda-\lambda_\nu)} \tag{8.20}$$

时，

$$Z_1(\lambda)=C\,\frac{Z_0(\lambda)Z(\lambda)-C}{CZ_0(\lambda)-Z(\lambda)} \tag{8.21}$$

仍为正实函数，在 t 个点之中，若在 r 个点上 $Z(\lambda)$ 的偶部等于零，则 $Z_1(\lambda)$ 比 $Z(\lambda)$ 低 r 次。

这里 $Z_1(\lambda)$ 的偶部 $G_1(\lambda)$ 由下式表出：

$$2G_1(\lambda)=C^2\frac{\{Z_0(\lambda)^2-1\}\{Z(\lambda)+Z(-\lambda)\}}{\{CZ_0(\lambda)-Z(\lambda)\}\{CZ_0(\lambda)+Z(-\lambda)\}}.$$

把这个式子的分子和分母的公因子除去，$G_1(\lambda)$ 的零点就是 $Z(\lambda)$ 的偶部的零点，所以知道可以尽量与上記的 λ_ν 相一致。

§9 倒量网絡和补量网絡

正实函数的倒数仍是一个正实函数，所以若給定一个二端网絡，它的阻抗設为 $Z(\lambda)$，则与它相当的，以 $R_0^2/Z(\lambda)$ 为阻抗的二端网絡必定存在。它称为原来网絡的倒量网絡。

由(5.3)和(5.4)知道，原来网絡的串联对应于倒量网絡的并联，并联对应于串联。对于只由串联和并联所构成的网絡，把各个串联换成并联，并联换成串联，在元件上，把电阻换成电阻，电感换成电容，电容换成电感，则就可得到倒量网絡。在不是串联和并联，但能在平面画成不交叉的結构的情况，倒量网絡也可用下述方法簡单地求出。考虑到网絡方程有回路方程和节点方程，把回路换成节点就可得到倒量网絡。例如在图 9.1 内，各个回路内和外部平面上分别放一个点 A，B，C

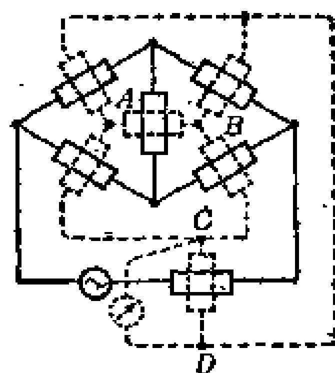


图 9.1

和 D，在这些点之間联接两回路公共支的倒量网絡，就可得到整个网絡的倒量网絡。

对于含有互感的，或不能画在一个平面上的网絡，虽然无法求出直接的网絡結构，但倒量网絡总是存在的。

倒量网絡是它的阻抗和原来的阻抗之积为定值的网絡，与之相对的，阻抗和原来阻抗之和为定值的网絡，叫做补量网絡。补量网絡不一定存在。它的存在条件是虛軸上沒有极点，且和数之值不能比虛軸上实部的最大值为小。显然这个条件是必要的。下面証明这条件也是充分的。現設所給的阻抗在虛軸上的实部为 $R_1(\omega)$，和为 R_0，則利用由

$$R_1(\omega)+R_2(\omega)=R_0 \tag{9.1}$$

規定的函数 $R_2(\omega)$，由于它不成为負，就可取它为实部作出虛軸上沒有极点的一个阻抗。这个阻抗和原来阻抗之和在虛軸上沒有极点，它的实部在虛軸上是一定的。因此，阻抗之和本身必須是一个常数电阻。这样得出的网絡就是补量网絡。

§10　电抗函数

电抗网絡是不消耗能量的网絡。所以它的阻抗的实部在虛軸上必須等于零。即

$$Z(j\omega)+\overline{Z(j\omega)}=0.$$

可是，$\overline{Z(j\omega)}=Z(-j\omega)$，所以

$$Z(j\omega)+Z(-j\omega)=0, \tag{10.1}$$

亦就是偶部在虛軸上等于零。根据解析函数的性质，因此在全平面上必須为零。于是 $Z(\lambda)$ 是一个奇函数。这里我們作如下的定义。

定义　正实的奇函数叫作电抗函数。

定理 16　电抗二端网絡的阻抗和导納都是电抗函数。

电抗函数是正实函数，所以必须在右半平面内正则，但由于它是奇函数，所以在左半平面内也必须正则。因此，它的极点只能存在在虚轴上。

于是电抗函数可表成下列形式：

$$Z(\lambda)=\frac{h_0}{\lambda}+\sum_{\nu}\frac{2h_\nu\lambda}{\lambda^2+\omega_\nu^2}+h_\infty\lambda. \tag{10.2}$$

这称为部分分式形式。但由于(8.7)式可表成图10.1的并联共振回路，所以一般的电抗二端网络总可以实现成图10.2的形式。同样，若把导纳展开成部分分式形式，则成为图10.3的形状。

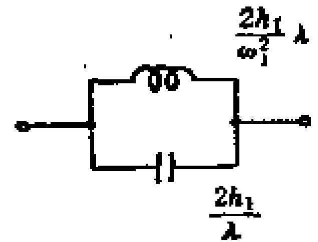


图 10.1

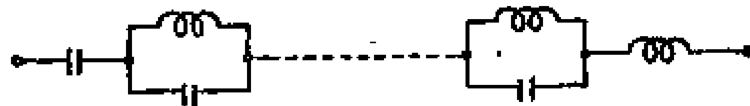


图 10.2

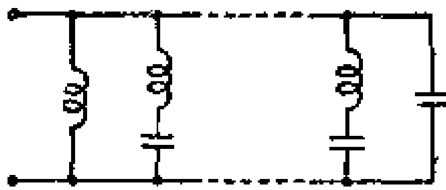


图 10.3

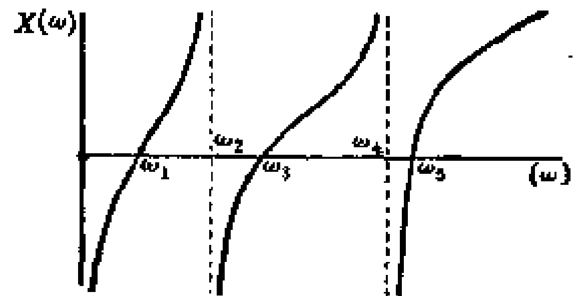


图 10.4

导納的极点只限在虚軸上，所以$Z(\lambda)$的极点和零点都限在虚軸上。这里可换写成

$$Z(j\omega)=jX(\omega), \tag{10.3}$$

但因为由(8.4)式，$X(\omega)$必须是ω的递增函数，所以它的图形如图10.4所示。由此知道，在虚軸上，$Z(\lambda)$的极点和零点交替地排列着(极点和零点彼此隔离)。因此，$Z(\lambda)$可表成下列形式：

$$Z(\lambda)=h\frac{(\lambda^2+\omega_1^2)(\lambda^2+\omega_3^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{2m+1}^2)}{\lambda(\lambda^2+\omega_2^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{2m}^2)}$$

$$(0\leqslant\omega_1<\omega_2<\omega_3<\cdots<\omega_{2m}<\omega_{2m+1}<\infty). \qquad (10.4)$$

从(10.4)可知，无穷远点总是零点或极点，在 $Z(\lambda)$ 以无穷远点为极点的情况下，如果把它分成

$$Z(\lambda)=a_1\lambda+Z_1(\lambda),$$

则无穷远点就成为 $Z_1(\lambda)$ 的零点。于是对于 $Z_1(\lambda)$ 的倒数，又可分出极点，以下反复这样的操作，可得出

$$Z(\lambda)=a_1\lambda+\frac{1|}{|a_2\lambda}+\frac{1|}{|a_3\lambda}+\cdots+\frac{1|}{|a_n\lambda}, \qquad (10.5)$$

各个系数 a_ν 都是正数。此外，若对原点的极点进行同样的操作，则

$$Z(\lambda)=\frac{1}{b_1\lambda}+\frac{1|}{|1/b_2\lambda}+\frac{1|}{|1/b_3\lambda}+\cdots+\frac{1|}{|1/b_n\lambda}. \qquad (10.6)$$

这称为连分式形式，对于(10.5)式，得出图10.5的实现形式，对于(10.6)式，则得出图10.6。另外，还能对有限频率的极点展开成连分式形式。

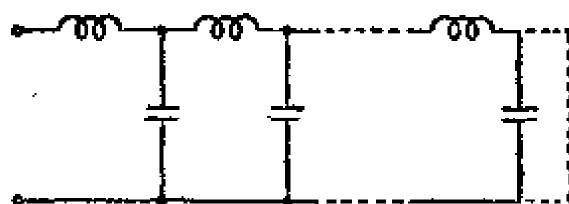


图 10.5

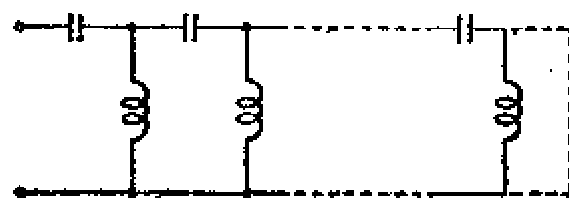


图 10.6

§11 Hurwitz 多项式

已經讲过，稳定网络的傳达函数在右閉半平面内是正則的。因

此,若它为有理函数,则分母多項式的零点只能在左半平面內。这种多項式就是 Hurwitz 多项式。即

定义 具有下述性质的实系数多項式称为 Hurwitz 多项式:

(i) 最高次项的系数为正;

(ii) 所有的零点全在左半平面內。

由于这是实系数的多項式,所以可分解成下面的一次因式或二次因式:

$$\lambda+a, \quad \lambda^2+2b\lambda+c.$$

所有的根全在左半平面內,因此,a, b 和 c 都必須是正数。于是有

定理 17 Hurwitz 多项式的系数全是正数。

設 $g(\lambda)$ 为 n 次 Hurwitz 多項式,把它分成偶部和奇部:

$$g(\lambda)=v(\lambda)+u(\lambda), \tag{11.1}$$

现在考虑如下的函数:

$$\varphi(\lambda)=\frac{g(\lambda)}{g(-\lambda)}=\frac{v(\lambda)+u(\lambda)}{v(\lambda)-u(\lambda)}. \tag{11.2}$$

由于 $\varphi(\lambda)$ 的零点分布在左半平面,极点对称地分布在右半平面,所以对于 $\lambda=j\omega$,

$$|\varphi(j\omega)|=1,$$

λ 在虛軸上由 0 变到 ∞ 时,$\arg\{\varphi(\lambda)\}$ 由 0 单調地增加到 $n\pi$。于是 $\varphi(\lambda)$ 交替地取 1 和 -1 之值。但 $\varphi(\lambda)=1$ 对应于 $u(\lambda)=0$; $\varphi(\lambda)=-1$ 对应于 $v(\lambda)=0$,所以 $v(\lambda)$ 和 $u(\lambda)$ 的零点交替地出现在虛軸上。虛軸以外的地方,沒有零点,这从零点的数目和次数上就立刻知道。因此

$$Z(\lambda)=\frac{v(\lambda)}{u(\lambda)} \tag{11.3}$$

是电抗函数。反之,亦容易証明电抗函数的分母和分子多項式之和是 Hurwitz 多項式。

关于 Hurwitz 多項式,下一个定理是重要的。

定理 18 多項式

$$g(\lambda)=C_0\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_n \tag{11.4}$$

为 Hurwitz 多項式的必要和充分条件是：在 $C_0>0$ 时，由这些系数作出的 Hurwitz 矩陣

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 & \cdots \\ C_0 & C_2 & C_4 & C_6 & \cdots \\ 0 & C_1 & C_3 & C_5 & \cdots \\ 0 & C_0 & C_2 & C_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

之中，各个左上角的子行列式

$$D_1=C_1,\quad D_2=\begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ C_0 & C_2 \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_5 \\ C_0 & C_2 & C_4 \\ 0 & C_1 & C_3 \end{vmatrix},\ \cdots \tag{11.6}$$

全都为正。

如果在以上的 Hurwitz 矩陣之左側和上側，各添加一列和一行，成为

$$\begin{pmatrix} C_0 & C_2 & \cdots \\ 0 & C_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{11.7}$$

則开始写出的条件 $C_0>0$，也可包括在子行列式的条件內。在这个意义上，

$$D_0=C_0.$$

这个定理的証明見諸代数书籍❶，关于这些子行列式，有个方便的公式，即

$$\frac{C_0\lambda^n+C_2\lambda^{n-2}+\cdots}{C_1\lambda^{n-1}+C_3\lambda^{n-3}+\cdots}=a_1\lambda+\frac{1}{|\,a_2\lambda}\Big|+\cdots, \tag{11.8}$$

它們和連分式展开中的系数 a_ν 有如下的关系：

❶ 例如藤原，代数学，第1卷，第601，617頁。

$$a_\nu = \frac{D_{\nu-1}^2}{D_{\nu-2}D_\nu} \quad (\nu=1, 2, \cdots, n), \tag{11.9}$$

其中 $D_{-1}=1$。

最后，对于 Hurwitz 多項式和正实函数的关系，我們有下列的定理。

定理 19 $Z(\lambda)$ 为正实函数的必要和充分条件是：把它的分母和分子分成偶部和奇部：

$$Z(\lambda) = \frac{v_1(\lambda)+u_1(\lambda)}{v_2(\lambda)+u_2(\lambda)}, \tag{11.10}$$

則

$$v_1(\lambda)+v_2(\lambda)+u_1(\lambda)+u_2(\lambda) \tag{11.11}$$

为 Hurwitz 多項式，在虛軸上

$$v_1(\lambda)v_2(\lambda)-u_1(\lambda)u_2(\lambda) \tag{11.12}$$

不能为負。

証明很簡单，首先，由于

$$\frac{1}{2}\{Z(\lambda)+Z(-\lambda)\} = \frac{v_1(\lambda)v_2(\lambda)-u_1(\lambda)u_2(\lambda)}{v_2(\lambda)^2-u_2(\lambda)^2},$$

在虛軸上，$\mathrm{Re}\,Z(\lambda)$ 不能为負。因此 $\mathrm{Re}\,\{Z(\lambda)+1\}$ 也不能为負。另一方面，根据(11.11)，$Z(\lambda)+1$ 的分子在右半平面沒有零点，所以由定理 3 和定理 4 的系，它是一个正实函数。因为 $Z(\lambda)$ 在右半平面正則，且 $\mathrm{Re}\,Z(\lambda)$ 不为負，故 $Z(\lambda)$ 也是正实函数。

§12 *RL* 和 *RC* 网絡

电抗二端网絡仅由綫圈和电容器組成，这种只由两种元件組成的网絡称为两元件网絡。此外，也有只由电阻和綫圈組成的网絡以及只由电阻和电容器組成的网絡。它們通常叫做“*RL* 网絡”和“*RC* 网絡”[1]。

[1] 参考第 7 章。

現在考慮一个 RL 网絡。对于这个网絡，如果把所有的 R 全用 C 替換，作出另一个网絡，則两者的回路方程分别为

$$\left.\begin{aligned}&\sum(\lambda L_{ij}+R_{ij})I_j=V_i, \quad (V_i=V'_i=0,\ i\geqslant 2),\\&\sum\left(\lambda L_{ij}+\frac{1}{\lambda C_{ij}}\right)I'_j=V'_i, \quad \left(\frac{1}{C_{ij}}=R_{ij}\right).\end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

后者可写成

$$\sum\left(\lambda^2 L_{ij}+\frac{1}{C_{ij}}\right)I'_j=\lambda V'_i. \tag{12.2}$$

由于左边的系数是 λ^2 的有理式，所以解出它以后，便成为

$$I'_1=F(\lambda^2)\cdot\lambda V'_1, \quad Z'(\lambda)=\frac{1}{\lambda F(\lambda^2)}.$$

这当然是电抗函数。比較(12.1)的上一个式子和(12.2)式，可知

$$I=F(\lambda)V_1, \quad Z(\lambda)=\frac{1}{F(\lambda)}.$$

就是說，RL 网絡的阻抗是电抗函数在把 λ^2 換成 λ 后的 λ 倍。因此写出

$$Z(\lambda)=H\frac{(\lambda+\sigma_1)(\lambda+\sigma_3)\cdots(\lambda+\sigma_{2m\pm1})}{(\lambda+\sigma_2)\cdots(\lambda+\sigma_{2m})}$$

$$(0\leqslant\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3<\cdots<\sigma_{2m}<\sigma_{2m+1}). \tag{12.3}$$

零点和极点交替地排列在負实軸上，最右端的一个是零点。

同样，对于 RC 网絡，把电抗函数中的 λ^2 換成 λ，再除以 λ，就成为阻抗，可表成(12.3)的倒数形式。它們和电抗函数一样，也能进行部分分式展开和連分式展开。

§13 二端网絡的綜合

已經讲过，集中参数二端阻抗 $Z(\lambda)$ 是一个正实(有理)函数。本节的目的就是反过来，在給定任意的正实函数时，証明存在一个二端网絡，以它作为阻抗。这种二端网絡的綜合方法最初是由

O. Brune 发現的，他的网絡是一种所謂梯子形构造，具有电抗元件数目最少的特点。其次的方法是电阻終接的电抗四端网絡的綜合，为了說明的方便，我們将在四端网絡的工作特性理論中叙述。还有一种重要的方法就是不含互感的綜合法。下面将依次地加以說明。

1) Brune 方法 假定給定的正实函数为 $Z(\lambda)$。

第1步 $Z(\lambda)$ 在虛軸上有极点时，把它們分离出来[1]，成为

$$Z(\lambda)=Z_1(\lambda)+\sum\frac{a_\nu\lambda}{\lambda^2+\omega_\nu^2}+a_\infty\lambda. \tag{13.1}$$

由于右边的第二項和第三項是一些可实現的电抗，所以 $Z(\lambda)$ 可表成图13.1的形式。剩下的 $Z_1(\lambda)$ 仍滿足正实函数的条件，它的次数比由 $Z(\lambda)$ 分出的电抗的次数低。

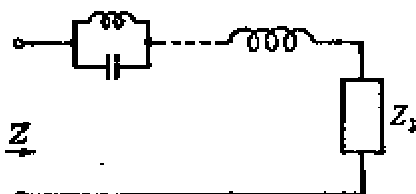


图 13.1

第2步 $Z_1(\lambda)$ 在虛軸上有零点时，再把它們分离出来：

$$\frac{1}{Z_1(\lambda)}=\frac{1}{Z_2(\lambda)}+\sum\frac{b_\nu\lambda}{\lambda^2+\omega_\nu^2}+b_\infty\lambda, \tag{13.2}$$

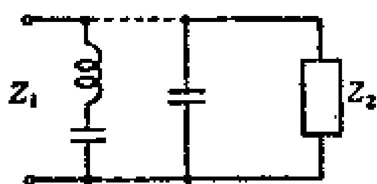


图 13.2

相当的网絡如图13.2。这一步又降低了分出的电抗的次数。

第3步 反复进行上面两步，經过有限多回，可得出一个在虛軸上沒有极点也沒有零点的正实函数。令它为 $Z_3(\lambda)$。設在虛軸上它的实部的最小值为 R_0，再作如下的分离：

$$Z_3(\lambda)=Z_4(\lambda)+R_0, \tag{13.3}$$

$Z_4(\lambda)$ 仍是正实函数，它的次数和 $Z_3(\lambda)$ 的次数相同。这一步以后，如果可能进行第1和2步，則还应該反复进行。

---

[1] 原点的极点是 $\omega_0=0$，包含在 Σ 中。

第4步　上述步驟不可能时，設它为 $Z_5(\lambda)$，它在虛軸上一点处取到不为零的純虛数值。这一点設为 $j\omega_0$，即可写出

$$Z_5(j\omega_0)=j\omega_0 L_1, \tag{13.4}$$

其中 L_1 是一个实常数。現在假定 L_1 是負的。由 $Z_5(\lambda)$ 可以分出一个負电感 L_1，剩下的是

$$Z_6(\lambda)=Z_5(\lambda)-\lambda L_1=Z_5(\lambda)+\lambda(-L_1), \tag{13.5}$$

由于 $(-L_1)$ 是正数，所以 $Z_6(\lambda)$ 是正实函数。但从(13.4)知道，$Z_6(j\omega_0)$ 等于零，根据第2步，就能分离出一个諧振电路与之并联。即写成

$$\frac{1}{Z_6(\lambda)}=\frac{1}{Z_7(\lambda)}+\frac{\lambda}{L_2(\lambda^2+\omega_0^2)}. \tag{13.6}$$

这个 L_2 表示諧振电路的电感。$\lambda\to\infty$ 时左边和右边第二項都趋于零，所以第一項也必須趋于零。就是說，$Z_7(\lambda)$ 在无穷远点具有极点。若把它分离出来，

$$Z_7(\lambda)=Z_8(\lambda)+\lambda L_3, \tag{13.7}$$

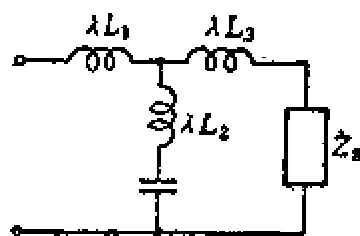


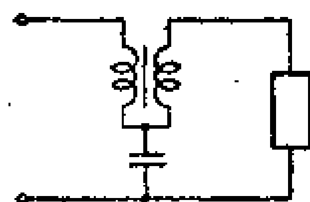
图　13.3

$Z_8(\lambda)$ 当然仍是正实函数。把以上結果用图表示，即得图13.3。其中电感 L_1 是負的，由(13.6)，考慮在 $\lambda=\infty$ 的附近，可得結果

$$-\frac{1}{L_1}=\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}, \tag{13.8}$$

但它可以改写成

$$(L_1+L_2)(L_2+L_3)=L_2^2, \tag{13.9}$$


图　13.4

于是可以用图13.4的正元件的全耦合綫圈表示出来。又在以上的步驟中，$Z_6(\lambda)$ 比 $Z_5(\lambda)$ 高一次，$Z_7(\lambda)$ 比 $Z_6(\lambda)$ 低二次，得出 $Z_8(\lambda)$ 时又降低一次，所以結果是得到一个降低二次的函数。

其次考慮 L_1 为正的情况。此时用导納代替阻抗后同样可得

图 13.5 的电路。虚綫内部是一个 π 型电路，若用 §19 的方法，把它变换成 T 型电路，则可得到图 13.6，它和图 13.4 同样能用正元件的全耦合綫圈表示出来。

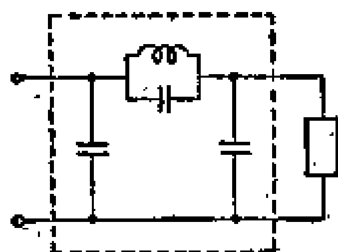


图 13.5

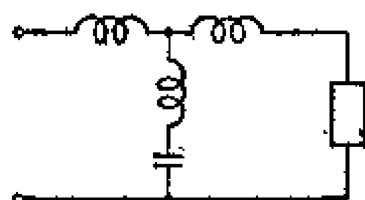


图 13.6

以上是把 L_1 为正和負的情况分别考虑，由图 13.6 可知，正的情况也能在阻抗形式下进行分离。此时由于 $Z_6(\lambda)$ 和 $Z_7(\lambda)$ 不是正实函数，要証明 L_2 是正的以及 $Z_8(\lambda)$ 是正实函数，比較麻煩一些。

以上四步总有一步是可能的，顺次进行，經过有限多回；結果綜合完成时，例如可得出图 13.7 所示的网絡。

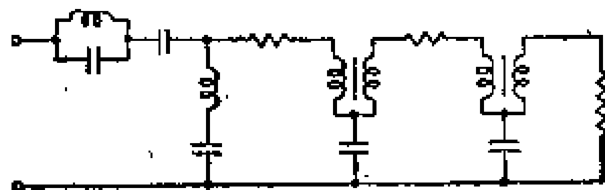


图 13.7

上面的第 3 和第 4 步，在虚軸上的极点和零点沒有全部除去的情况下也能进行，所以改变这种次序，結果能得出各种不同的构造。

以上的第 3 步是在虚軸上作出阻抗偶部的零点的步驟，进行这种方法也就是由偶部的复数零点直接綜合的方法。首先，实軸上有零点时和第 4 步一样，可以分出图 13.3 的一节。这一次 L_2 将变成負。有复数零点时，可以分出一个图 13.3 那样的，但其中的电感用串联諧振电路代替的，电容用并联諧振电路代替的一节。这个方法在綜合途中不需要分出电阻，所以所得的网絡正好是一个电抗四端网絡終接一个电阻的形式。这个方法事实上不外就是 §20 所述的电抗四端网絡的鏈联綜合法。

2）不使用互感的綜合理論 在 Brune 方法中，第 4 步必需

全耦合綫圈。可是全耦合綫圈或一般的互感，和单个的电感和电容比較起来，正确的物理实现較为困难，所以很希望有一种不使用互感的网絡。如把第 4 步作如下改变，則这是可能的❶。即在

$$Z_5(j\omega_0)=j\omega_0 L_1 \tag{13.10}$$

中，設 L_1 为正，由定理 8，可求出一个正的实数 λ_0，滿足下列方程：

$$Z_5(\lambda_0)=\lambda_0 L_1. \tag{13.11}$$

再由这个 λ_0，作出

$$Z_6(\lambda)=Z_5(\lambda_0)\frac{\lambda Z_5(\lambda)-\lambda_0 Z_5(\lambda_0)}{\lambda Z_5(\lambda_0)-\lambda_0 Z_5(\lambda)}, \tag{13.12}$$

并根据 Richards 定理，它是次数不高于 $Z_5(\lambda)$ 的正实函数。反之，由上式解出 $Z_5(\lambda)$，則

$$\begin{aligned}Z_5(\lambda)&=Z_5(\lambda_0)\frac{\lambda Z_6(\lambda)+\lambda_0 Z_5(\lambda_0)}{\lambda Z_5(\lambda_0)+\lambda_0 Z_6(\lambda)}\\&=\left\{\frac{1}{Z_6(\lambda)}+\frac{\lambda_0}{\lambda Z_5(\lambda_0)}\right\}^{-1}+\left\{\frac{\lambda}{\lambda_0 Z_5(\lambda_0)}+\frac{Z_6(\lambda)}{Z_5(\lambda_0)^2}\right\}^{-1}\\&=\left\{\frac{1}{Z_6(\lambda)}+\frac{1}{\lambda L_1}\right\}^{-1}+\left\{\lambda C_1+\frac{1}{Z_7(\lambda)}\right\}^{-1},\end{aligned} \tag{13.13}$$

其中

$$C_1=1/\lambda_0^2 L_1,\quad Z_7(\lambda)=\lambda_0^2 L_1^2/Z_6(\lambda).$$

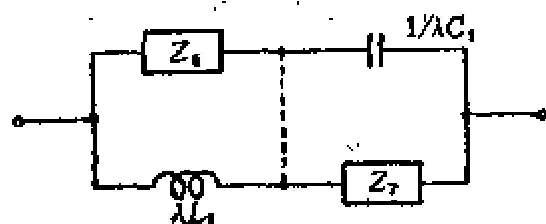


图 13.8

(13.13)式的意义就是把 $Z_5(\lambda)$ 表成图 13.8。但在(13.12)的分母中，代入 $\lambda=j\omega_0$，則由(13.10)和(13.11)，知道分母等于零。然而分子不等于零，所以 $Z_6(\lambda)$ 在 $\lambda=j\omega_0$ 处具有极点，若用第 1 步把它分出，則得一个次数降低二次的阻抗。$Z_7(\lambda)$ 也具有零点，所以也能够降低二次。

❶ R. Bott, R. J. Duffin, Impedance synthesis without use of transformers, J. A. P., 20 (1949), 816.

在 L_1 为負的情况下，可以在导納基础上进行同样的演化。以上是这个方法的要点。

推广这个方法，便得出处理偶部零点的方法，亦就是不使用 Brune 的第 3 步的方法❶。設

$$2G(\lambda)=Z(\lambda)+Z(-\lambda),$$

它的右半平面的零点設为 λ_0，λ_0 是正的实数。根据定理 14，

$$Z_1(\lambda)=Z(\lambda_0)\frac{\lambda Z(\lambda)-\lambda_0 Z(\lambda_0)}{\lambda Z(\lambda_0)-\lambda_0 Z(\lambda)} \tag{13.14}$$

是比 $Z(\lambda)$ 低一次的阻抗，于是除去了 λ_0 处的零点。如果 $\lambda_0=\sigma_0+j\omega_0$ $(\sigma_0>0)$，且

$$Z(\lambda_0)=C>0,$$

同样可根据定理 15，取 $Z_0(\lambda)=\dfrac{\lambda^2+\sigma_0^2+\omega_0^2}{2\sigma_0\lambda}$，則

$$Z_1(\lambda)=C\frac{Z_0(\lambda)Z(\lambda)-C}{CZ_0(\lambda)-Z(\lambda)} \tag{13.15}$$

是比 $Z(\lambda)$ 低二次的阻抗，这就除去了 λ_0 处的零点。在

$$Z(\lambda_0)=r_0+jx_0 \quad (x_0\neq 0)$$

的情况下，首先作出

$$Z_1(\lambda,k)=Z(k)\frac{\lambda Z(\lambda)-kZ(k)}{\lambda Z(k)-kZ(\lambda)}, \tag{13.16}$$

則
$$Z_1(\lambda_0,0)=(r_0+jx_0)/Z(0),$$
$$Z_1(\lambda_0,\infty)=Z(\infty)/(r_0+jx_0).$$

由于两者的虚部符号相反，所以存在一个实的正数 k_0，使得

$$Z_1(\lambda_0,k_0)=C>0.$$

选擇这个 k_0，則 $Z_1(\lambda,k_0)$ 可以进行 (13.15) 的演化，于是又可把 λ_0 处的零点除去。

❶ 喜安善市，不使用互感的二端网絡綜合法，电气通信学会杂志，33 (1950)，343～352. A. Fialkow, I. Gerst, Impedance synthesis without minimization, J. M. P., 34 (1955), 160～168.

最后，再讲述一个有趣的方法❶。已經讲过，虚軸上沒有极点的正实函数是由它的偶部唯一地决定的。这里把偶部作如下的分解：

$$G(\lambda)=\sum G_\nu(\lambda), \tag{13.17}$$

如果各个 $G_\nu(\lambda)$ 都滿足正实函数偶部的条件，且对于各个 $G_\nu(\lambda)$（虚軸上沒有极点）各定出正实函数 $Z_\nu(\lambda)$，則由于唯一性，就有

$$Z(\lambda)=\sum Z_\nu(\lambda). \tag{13.18}$$

补量网絡是这个原理的一个应用，还有，Brune 的第 3 步，取

$$G(\lambda)=G_1(\lambda)+R_0,$$

$G_1(\lambda)$ 的零点也可考虑在虚軸上的这种分解。这里把它一般化，在进行 (13.17) 的分解时，要使各个 $G_\nu(\lambda)$ 在虚軸上都具有零点。为了簡单起見，分母的常数項假定为正，由于分子是在虚軸上不能为負的偶多項式，所以能把它分解成虚軸上不为負的偶多項式之和。这种方法有許多种，例如对应于一組复数零点❷，若分成因式

$$(\lambda^2-2\sigma_1\lambda+\omega_1^2)(\lambda^2+2\sigma_1\lambda+\omega_1^2)=(\lambda^2+\omega_1^2)^2-4\sigma_1^2\lambda^2, \tag{13.19}$$

則由于右边两項在虚軸不为負，$G(\lambda)$ 可按此进行分解，它的第一項在 $j\omega_1$ 有零点，第二項在原点和无穷远点有零点。把它一般化，設 $g(\lambda)$ 为具有左半平面零点的因式，若把它分成偶部和奇部之和，且

$$g(\lambda)g(-\lambda)=v(\lambda)^2-u(\lambda)^2, \tag{13.20}$$

則按照 Hurwitz 多項式的性质，$v(\lambda)$ 和 $u(\lambda)$ 的零点全部在虚軸上。

更有趣的分解法，是把分子多項式各項完全拆散，如此分解后，各个 $G_\nu(\lambda)$ 只在原点和无穷远点有零点，再用 Brune 方法来

---

❶ 富田房近，二端网絡合成的新系統，电气通信学会杂志，35(1952)，211～218.

❷ 复数零点四个成对地出現。实軸上的零点是正負对出現，虚軸上的零点是二阶的。

实現，可得出图 13.9 所示的沒有理想变压器的簡单电路。这种分解不是經常可能的，作为分子多項式的 $-\lambda^2$ 多項式，写成

$$\sum a_\nu(-\lambda^2)^\nu \qquad (13.21)$$

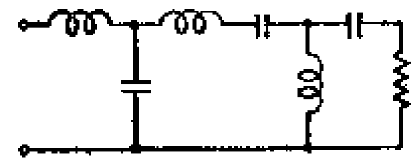


图 13.9

时，各个 a_ν 都必須为正或零。但是 a_ν 也有負的，此时解决的方法是零点不限在虛軸上，或者在 $G(\lambda)$ 的分母和分子上同乘以虛軸上为正值的适当的偶多項式，使系数都成为正数。

第3章　四端网絡

§14 四端网絡

对于四端网絡，由于可考虑它的分离开的輸入和輸出端子，且已知傳达函数具有第1章所述的一般性质，所以它已具备傳輸网絡的面貌。事实上，实际的傳輸网絡几乎全是四端网絡的簡单組合。当然，四端网絡是多端网絡的一种，从多端网絡的理論来作一般的討論，可以更清楚。可是，多端网絡理論本身就以四端网絡理論作为模型，并且把傳輸四端网絡的設計理論和多端网絡的一般討論分开，比較方便，所以在本篇內，主要叙述四端网絡的設計理論和傳輸四端网絡方面很重要的电抗四端网絡。与一般四端网絡有关的实現条件和綜合上其他的基本問題，都将放在第二篇內讲述。这里首先在本章內，凡是与第二篇有点重复的地方，都是作为設計理論的准备而叙述一些必要事項的大意。

进入討論以前，需要对几种实用的四端网絡作一番簡单說明。

濾波器——即是能从各种频率的信号混合成的合成信号中分离出特定频率范圍的信号的网絡。衰減小、能让通过的频带叫作通带，衰減大、几乎不让信号通过的频带叫作阻带，这个边界上的频率叫做截止频率。按照通带在哪个频率范圍，濾波器可分成下列几类。

(i) **低通濾波器**　这是以比截止频率低的一側为通带，高的一側为阻带的濾波器。

(ii) **高通濾波器**　反之，这是以高的一側为通带的濾波器。

(iii) **带通濾波器**　这是在两个有限频率之間为通带，外側为阻带的濾波器。

(iv) **带阻濾波器**　这是与(iii)相反的濾波器。

此外，也有具两个以上通带的濾波器。

延迟网絡——是使信号有一定时間延迟的网絡。

衰减校正网絡——傳輸綫在不同的频率上显示出不同的衰减特性。因此在长距离上傳輸信号时，为了保持信号的明了度，有必要把这个衰减特性校正成同样的衰减。具有这种性质的就是衰減校正网絡。

相位校正网絡——性质同上，但为校正相位特性的网絡。

其他，虽然还有变压器、衰减器等傳輸綫路，但在本书中，主要討論滤波器的問題。

§ 15 四端网絡的表达方法

今在图 15.1 内，取两对端子 11′ 和 22′，定出各个电压电流 V_1, I_1, V_2, I_2之方向如箭头所示。四端网絡的性质因而由这四个变数之間的关系所規定。为了求出这个关系，我們作出在第 1 和第 2 閉路内含有这两对端子的回路方程

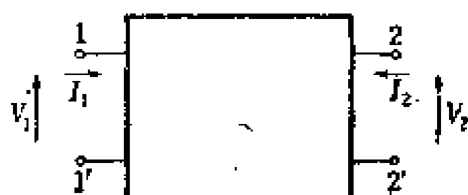


图 15.1

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}I_j=V_i \quad (i=1, 2, \cdots, n),\\ V_i=0 \quad (i\geqslant 3).\end{aligned}\right\} \tag{15.1}$$

由此，消去 $I_j(j\geqslant 3)$，可得

$$\left.\begin{aligned}a_1I_1+b_1I_2+c_1V_1+d_1V_2=0,\\ a_2I_1+b_2I_2+c_2V_1+d_2V_2=0\end{aligned}\right\} \tag{15.2}$$

形式的两个独立的一次式。有时 I_1 和 I_2 不是独立的，在这种情况下，回路方程仍須是(15.1)的形式，但不能变成(15.2)那样的独立的两个一次式。我們虽然求出了(15.2)的形式来規定四端网絡，但它們毕竟在处理上是不方便的，所以通常有解出其中两个变量的形式。例如，解出 I_1 和 I_2，可得

$$I_1=Y_{11}V_1+Y_{12}V_2,$$

$$I_2=Y_{21}V_1+Y_{22}V_2.$$

我們还可方便地把它們表成矩陣的形式

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \qquad (15.3)$$

这个 (Y_{ij}) 叫作“导納矩陣”。同样，按照所选两个变量的不同，还有下列的表达式：

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(阻抗矩陣)} \qquad (15.4)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_1 \end{pmatrix}, \qquad (15.5)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}. \quad \text{(鏈联矩陣)} \qquad (15.6)$$

在最后两式內，采用 $-I_2$ 是为了使用上的方便。此外，也有解出 V_2 和 I_1 或 V_2 和 I_2 的式子，但若将两对端子交换，就变成上式，由于在物理上性质相同，所以沒有特殊考慮的必要。另外，所有这些表达方法不是經常可能的，但由于总可以表成(15.2)的形式，所以在这些表达方法中总有某种是可能的。

若将这类式子右边的变量看为輸入，那末左边的变量就变成相应的輸出，矩陣的各个元素都是傳达函数，但只有最后的鏈联矩陣是例外，11′ 端子側不加信号时，由于不能独立定出 V_2 和 I_2，所以不能把它看成为輸入，因此 A, B, C 和 D 就不一定是傳达函数。可是，这个矩陣在傳輸四端网絡理論中考慮起来非常方便，通常以 K 表示。

这里，最好写出阻抗矩陣、导納矩陣以及鏈联矩陣之間的变换式

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Z|} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} D & -|K| \\ -1 & A \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} A & |K| \\ 1 & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = -\frac{1}{Y_{21}} \begin{pmatrix} Y_{22} & 1 \\ |Y| & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & |Z| \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix}.$$

其中$|Z|=Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}$，$|Y|=Y_{11}Y_{22}-Y_{12}Y_{21}$，$|K|=AD-BC$。順便，也最好求出輸入阻抗(导納)的表达式。在四端网絡22′端子上联接一个阻抗Z_2时，从11′端看入的阻抗(导納)为

$$Z_i=\frac{V_1}{I_1}=\frac{AV_2+B(-I_2)}{CV_2+D(-I_2)}=\frac{AZ_2+B}{CZ_2+D}$$

$$=Z_{11}-\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}+Z_2}=Z_{11}\frac{Z_{2s}+Z_2}{Z_{22}+Z_2},$$

$$Y_i=Z_i^{-1}=Y_{11}-\frac{Y_{12}^2}{Y_{22}+Y_2}=Y_{11}\frac{Y_{20}+Y_2}{Y_{22}+Y_2}$$

$$(Z_{2s}=Y_{22}^{-1},\ Y_{20}=Z_{22}^{-1},\ Y_2=Z_2^{-1}).$$

可是，如§7所述，对于由R, L, C及M构成的集中参数网絡，由于在(15.1)的系数之間有$Z_{ij}=Z_{ji}$的关系，所以在(15.3)內，变成

$$Y_{12}=Y_{21}. \tag{15.7}$$

这表明互易定理是成立的，这样的网絡叫做互易网絡。在其他矩陣中，这种关系表現为

$$Z_{12}=Z_{21},\quad \alpha=\delta,\quad |K|=1. \tag{15.8}$$

下面，如沒有特殊声明，所考慮的都限于互易的网絡。

以上讲了四端网絡的四种表达形式。除此之外，还有各种表达方法。其中之一是对到达这些端子上的电压和电流，考慮其波的傳播形式，对于傳輸网絡，这是一种重要的表达方法。現在考慮图15.2那样的，在四端网絡的两对端子上联接适当傳輸綫的情形。如以后§19所述，傳輸綫上的电压和电流都是入射波和反射波，就各个波而言，电压与电流之比等于由綫路决定的常数**波动阻抗**Z_0。所以不必規定电压和电流两者，为了方便，进行标称以后，只需写出

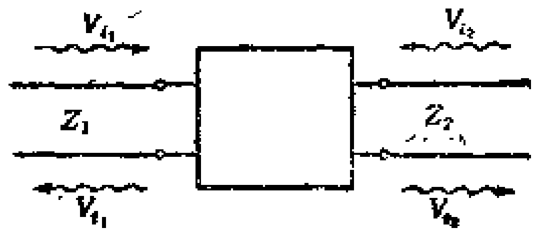


图 15.2

$$v=V/\sqrt{Z_0}=\sqrt{Z_0}I.$$

于是在图中的四端网絡内，如果令 v_{i1}，v_{i2}；v_{r1}，v_{r2} 各为入射波和反射波，则一个四端网絡就規定了这四个波之間的关系。这算是第四种表达形式，即“S 矩陣”的形式❶

$$\begin{pmatrix} v_{r1} \\ v_{r2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}. \tag{15.9}$$

对于互易网絡，也有 $S_{12}=S_{21}$。从四端网絡两側观看綫路，可以等价地画成图 15.3 那样。就是說，S 矩陣規定了有限外部阻抗情况下的性质。在这种意义下，它是一个**工作特性矩陣**。

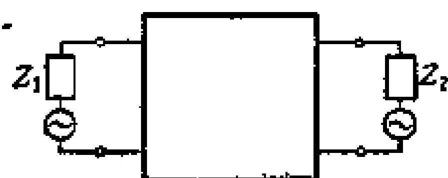


图 15.3

此外，还有电流傳輸系数、电压傳輸系数的表达，和影象参数的表达，这些将在另一节内討論。

按照上述的各种表达形式，必須取四个参数才能完全規定一个四端网絡，在互易的情况下，必須取三个参数。

§16 傳輸系数

信号的傳輸网絡是四端网絡时，它的輸入端和輸出端各接电源和負載，它們的阻抗的值一般是有限的。于是，这种使用状态下的傳輸特性可以用一些参数表示出来。



图 16.1

1) 电流傳輸系数　在图 16.1 内，如果輸入端有一个內阻为无穷大的电流源，輸出端联接一个有限值的电阻 R_2，此时，輸入与輸出电流之比由下式定义：

$$M \equiv \frac{I_1}{I_2} = CR_2 + D = \frac{R_2 + Z_{22}}{Z_{12}}. \tag{16.1}$$

❶ 在第二篇內将詳細叙述 S 矩陣。

这和 §4 所述的傳达函数相反，分子是輸入，分母是輸出，以后知道，这种式子在理論上是方便的。这种函数是傳达函数的倒数，习慣上称之为**傳輸系数**。

2) 电压傳輸系数 图 16.2 内，在电源内阻为零，輸出端电阻为有限值的情况下，可表成

$$N = \frac{V_1}{V_2} = BG_2 + A = \frac{G_2 + Y_{22}}{-Y_{12}}. \qquad (16.2)$$

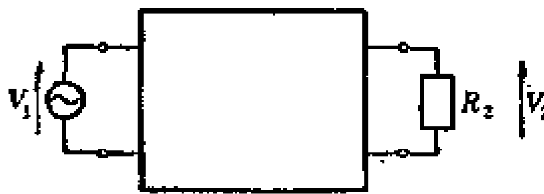


图 16.2

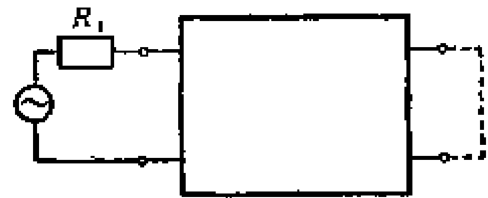


图 16.3

3) 短路傳輸系数和开路傳輸系数 在图 16.3 内，电源側为有限的电阻、負载电阻为 ∞ 或 0 时，各可表成

$$\left.\begin{aligned} M_s &= \frac{I_0}{I_2} = BG_1 + D = \frac{G_1 + Y_{11}}{-Y_{12}}, \\ N_0 &= \frac{V_0}{V_2} = CR_1 + A = \frac{R_1 + Z_{11}}{Z_{12}}. \end{aligned}\right\} \qquad (16.3)$$

由此知道，将四端网絡反向联接时 M 和 N 仍不变。以上四个傳輸系数也是四端网絡的一种表达形式。

4) 工作傳輸系数 这是图 16.4 内两个終端电阻都为有限时表示傳輸特性的系数，基准电压取为图示的电源电压，在图 16.5 那样的电源和負载之間，联接一个使这两个电阻相匹配的理想变

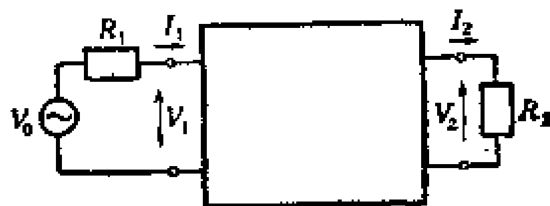


图 16.4

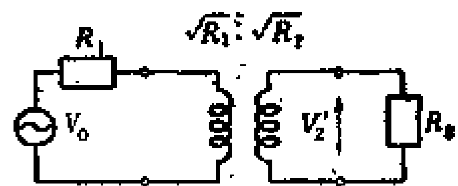


图 16.5

压器时，輸出电压就是无源四端网絡負載上最大的輸出电压❶。因此，我們表成下列形式：

$$S_b = \frac{V_2'}{V_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\frac{V_0}{V_2}. \tag{16.4}$$

实际上，这就是 S 矩陣的 S_{21} 的倒数。

5) 反射傳輸系数 輸入端阻抗已經匹配时，輸入阻抗 Z_i 等于 R_1，輸入电压成为 $V_0/2$. 但一般情况下的輸入电压不是这个 $V_0/2$，由于不匹配时，可以考虑有一部分的 $V_0/2$ 反射回来。这就可写

$$V_1 = \frac{V_0}{2} + \frac{1}{T}\,\frac{V_0}{2}. \tag{16.5}$$

这个 T 称为反射傳輸系数。它就是 S 矩陣的 S_{11} 的倒数。

这里，还可把 S_b 和 T 的表达式求下去。

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,A + \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\,B + \sqrt{R_1R_2}\,C + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,D\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,M + \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,N\right). \end{aligned} \tag{16.6}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{Z_i + R_1}{Z_i - R_1} = \frac{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,A + \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\,B + \sqrt{R_1R_2}\,C + \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,D}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,A + \frac{1}{\sqrt{R_1R_2}}\,B - \sqrt{R_1R_2}\,C - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,D} \\ &= \frac{NR_2 + MR_1}{NR_2 - MR_1}. \end{aligned} \tag{16.7}$$

§17 影象参数

两个終端阻抗如果各等于四端网絡的两个輸入阻抗，那末由于在联接点沒有反射，S 矩陣变成对角綫元素为零的簡单形式。影象参数就是这种状态下的表达形式。

在图 17.1 内，如果四端网絡的 22′ 端子上接有阻抗 Z_{02} 时，

❶ 此时由电源有最大的功率供至負載。

11′ 端的輸入阻抗为 Z_{01}，反之，如果 11′ 端子上接有阻抗 Z_{01} 时，22′ 端的輸入阻抗为 Z_{02}，那末这样两个阻抗 Z_{01} 和 Z_{02} 統称为**影象阻抗**。



图 17.1

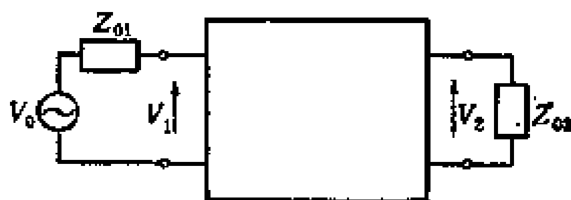


图 17.2

当两个終端阻抗是影象阻抗时，也可求出如图 17.2 状态的与工作傳輸系数相当的系数

$$S_I=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\frac{V_0}{V_2}=\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\frac{V_1}{V_2}. \tag{17.1}$$

它叫作影象傳輸系数，由公式

$$\gamma\equiv\alpha+j\beta\equiv\ln S_I \tag{17.2}$$

定义的 γ 叫作**影象傳輸量**。它的实部 α 叫影象衰减，虛部 β 叫影象相位❶。

其次考虑将这种参数用四端网絡参数来表达。首先，Z_{01} 和 Z_{02} 必須满足

$$Z_{01}=\frac{AZ_{02}+B}{CZ_{02}+D},\quad Z_{02}=\frac{DZ_{01}+B}{CZ_{01}+A}.$$

由此得到

$$Z_{01}=\sqrt{\frac{AB}{CD}}=\sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}},\quad Z_{02}=\sqrt{\frac{DB}{CA}}=\sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}}. \tag{17.3}$$

由于 $1/Y_{11}$ 是終端短路时的輸入阻抗，令它为 Z_{1s}，則通常写成

$$Z_{01}=\sqrt{Z_{11}Z_{1s}},\quad Z_{02}=\sqrt{Z_{22}Z_{2s}}.$$

就是說，影象阻抗是終端开路和終端短路时的两个輸入阻抗的几何平均。对于傳輸量，把 (16.6) 式的 R_1 和 R_2 分别代以 Z_{01} 和 Z_{02}，即得

$$e^{\gamma}=S_I=\sqrt{AD}+\sqrt{BC}.$$

这里利用 $AD-BC=1$ 的关系，可得

❶ 也有人把 α 和 β 倒过来使用。

$$e^{-\gamma}=\sqrt{AD}-\sqrt{BC}.$$

由此得到

$$\cosh\gamma=\sqrt{AD},\quad \sinh\gamma=\sqrt{BC}$$

以及

$$\coth\gamma=\sqrt{\frac{AD}{BC}}=\sqrt{Z_{11}Y_{11}}=\sqrt{Z_{22}Y_{22}}. \tag{17.4}$$

反之，又可得下列諸式：

$$\left.\begin{aligned}A&=\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\cosh\gamma, & B&=\sqrt{Z_{01}Z_{02}}\sinh\gamma,\\ C&=\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}\sinh\gamma, & D&=\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\cosh\gamma\end{aligned}\right\} \tag{17.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&Z_{11}=Z_{01}\coth\gamma,\quad Z_{22}=Z_{02}\coth\gamma,\\ &Z_{12}=\sqrt{Z_{01}Z_{02}(\coth^2\gamma-1)}.\end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

§18 四端网絡的結合

两个四端网絡如图18.1那样串联时，总的阻抗矩陣卽是这两个四端网絡的阻抗矩陣之和。可是，这时每个四端网絡各对端子必須滿足傳輸四端网絡的条件，卽电流的大小相等，方向相反。如果在一个四端网絡的一对端子上联接一个理想变压器，则这个条件恒能滿足。

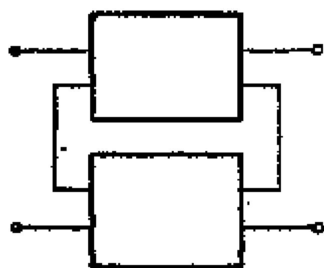


图 18.1

同样，如果象图18.2那样并联，則各个导納矩陣之和卽是总的导納矩陣。此时也必須有以上的条件。

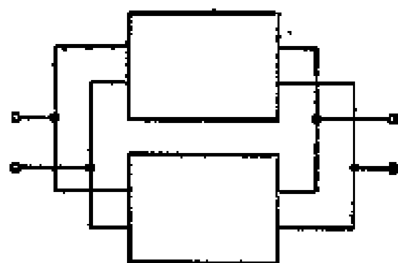


图 18.2

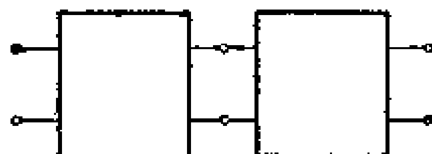


图 18.3

图18.3的鎖联，对于傳輸四端网絡是很重要的。这时各个鎖

联矩陣之积卽为总的鎖联矩陣。这也是鎖联矩陣名称的来由。

§ 19 簡单的四端网絡及其变換

为了帮助理解，我們考虑一些簡单的四端网絡的实例。

1) 梯子形网絡　图 19.1 的两个网絡是最基本的。它們的鎖联矩陣分别为

$$\begin{pmatrix}1 & Z\\0 & 1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\Y & 1\end{pmatrix}. \qquad (19.1)$$

Γ 形网絡(图 19.2)，T 形网絡(图 19.3)，π 形网絡(图 19.4)以及一般的梯子形网絡(图 19.5)都可看成这些基本网絡的鎖联，它們的鎖联矩陣可表成(19.1)形式的矩陣的乘积。



图 19.1

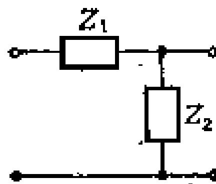


图 19.2

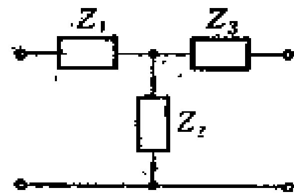


图 19.3

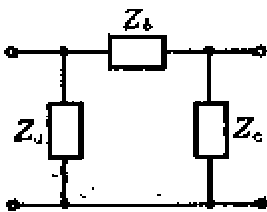


图 19.4

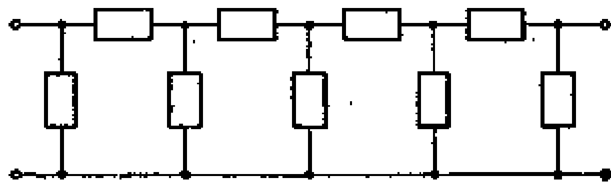


图 19.5

T 形和 π 形的相互变換式如下：

$$Z_a=\frac{\Delta}{Z_3},\quad Z_b=\frac{\Delta}{Z_2},\quad Z_c=\frac{\Delta}{Z_1}$$

$$(\Delta=Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1),$$

$$Z_1=\frac{Z_c}{Z_a+Z_b+Z_c},\quad Z_2=\frac{Z_b}{Z_a+Z_b+Z_c},\quad Z_3=\frac{Z_a}{Z_a+Z_b+Z_c}.$$

2) 对称四端网絡　这是左右两对端子經过交換后，傳输性质

不变的网络，它有下列关系：

$$Z_{11}=Z_{22},\quad Y_{11}=Y_{22},\quad A=D,\quad Z_{01}=Z_{02}. \qquad (19.2)$$

有趣的是此时可令

$$Z_a=Z_{11}+Z_{12},\quad Z_b=Z_{11}-Z_{12}, \qquad (19.3)$$

而 Z_a 和 Z_b 都是可实现的阻抗。在图 19.6(*a*)和(*b*)内，把输入和输出端串联后测出的阻抗就是 $2Z_a$ 和 $2Z_b$（图内的理想变压器与§18 所述的有相同的意义）。由上式，反之可得

$$Z_{11}=(Z_a+Z_b)/2,\quad Z_{12}=(Z_a-Z_b)/2. \qquad (19.4)$$

这説明一个对称的四端网络可以用两个二端阻抗表达出来。

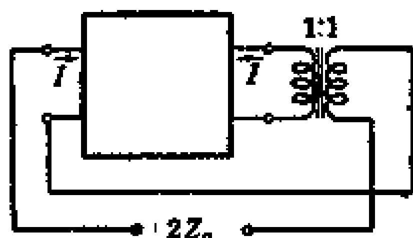


图 19.6(*a*)

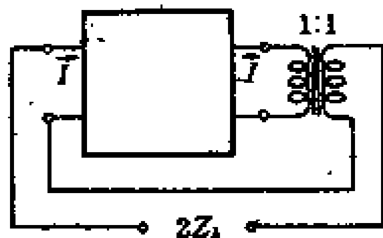


图 19.6(*b*)

如果对称四端网络在构造上也是对称的，那末可把它分成图 19.7 那样用綫联接的两部分，在图 19.6(*a*)内 $I_1=I_2$ 状态时，联接綫内的电流为零，而在(*b*)图内 $I_1=-I_2$ 状态时，其余联接綫内的电流为零。此时在图 19.8 内，取它的一半，如 $I_1=I_2$，零电流的联接綫成为开路，其余的为短路，这种状态测出的阻抗即为 Z_a，开路和短路对調后测出的阻抗即为 Z_b。这就称为**二等分定理**。

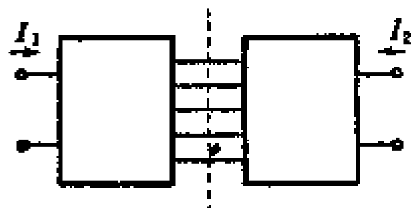


图 19.7

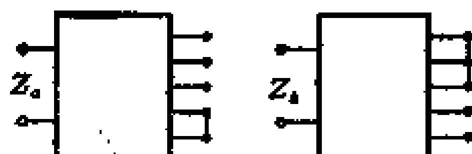


图 19.8

在图 19.9 的对称格子形网络内，应用二等分定理，图中各支的阻抗就是 Z_a 和 Z_b。因此，对称四端网络总可以表成对称格子

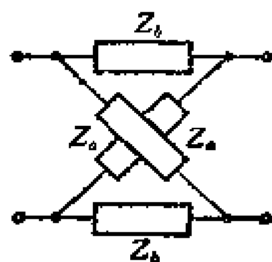


图 19.9

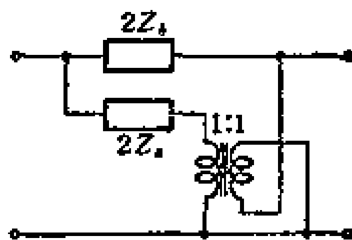


图 19.10

形网絡❶。

图 19.10 为对称格子形网絡的一个等效网絡，此外，还有許多其他的等效网絡。

3) 反对称四端网絡 如果一个四端网絡(或一般多端网絡)的阻抗矩陣是另一个四端网絡(多端网絡)阻抗矩陣 (Z_{ij}) 的逆矩陣形式，即 $R_0^2(Z_{ij})^{-1}$，則称这个四端网絡为另一个四端网絡的倒量网絡。所謂反对称网絡，即是左右两对端子交換后，所成的网絡为原来四端网絡的倒量网絡。在这种情况下，下列关系是成立的：

$$\left.\begin{aligned}&Z_{11}=R_0^2Y_{22},\ Z_{22}=R_0^2Y_{11},\ Z_{12}=-R_0^2Y_{12},\\&B=R_0^2C,\ Z_{01}Z_{02}=R_0^2.\end{aligned}\right\}\tag{19.5}$$

特别是对于具有对称和反对称两性质的四端网絡，

$$Z_aZ_b=R_0^2,\ Z_{01}=Z_{02}=R_0,\ S_b=S_I=\frac{Z_a+R_0}{Z_a-R_0}.\tag{19.6}$$

4) 傳輸綫 在图 19.11 内，长为 l 的一段綫路的送电端联有一个电源，接收端接有某个阻抗，設与接收端相距 x 处的电流和电压为 i 和 v，在 $x+dx$ 点处的电流和电压为 $i+di$ 和 $v+dv$，綫路

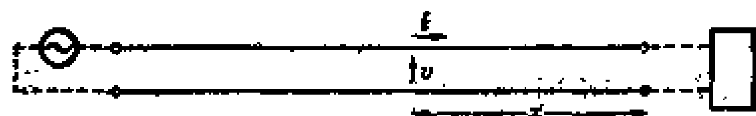


图 19.11

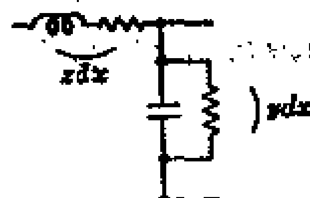


图 19.12

❶ 反之不成立。——譯者注

是典型的分布参数网絡，但在微小区間 dx 上，可认为它含有图 19.12 那样的微小元件。因此，串联元件 zdx 上的电压降和并联元件 ydx 内的分路电流各为

$$\left.\begin{aligned} dv&=zidx,\\ di&=yvdx.\end{aligned}\right\} \tag{19.7}$$

把它写成

$$\frac{dv}{dx}=zi,\quad \frac{di}{dx}=yv,$$

解之可得

$$\left.\begin{aligned} v&=v_ae^{\gamma x}+v_be^{-\gamma x},\\ i&=i_ae^{\gamma x}+i_be^{-\gamma x},\end{aligned}\right\} \tag{19.8}$$

$$v_a=Z_0i_a,\quad v_b=-Z_0i_b,$$

其中

$$\gamma=\sqrt{yz},\quad Z_0=\sqrt{z/y}. \tag{19.9}$$

这两式的第一項是由送电端至接收端傳播的行波，第二項是反方向的行波。加入接收端的条件 $v=Z_2i$，卽得

$$v_b=\frac{Z_2-Z_0}{Z_2+Z_0}v_a. \tag{19.10}$$

它的右边的系数是反射波与入射波之比，卽反射系数，当 $Z_2=Z_0$ 时，它变成零，反射波消失，而

$$v=v_ae^{\gamma x},\quad i=i_ae^{\gamma x}, \tag{19.11}$$

在送电端，輸入阻抗为

$$Z_1=\left(\frac{v}{i}\right)_{x=l}=Z_0. \tag{19.12}$$

因此，Z_0 在綫路上具有重要的意义，它叫作**波动阻抗**。历史上，傳輸綫理論是影象参数理論的基础。

§20 电抗四端网絡

一般的四端网絡理論将在第二篇內叙述，由于电抗四端网絡在下一章以后所述的傳輸四端网絡的設計上是必不可少的，所以

这里簡单地讲述它的实现条件和构成方法。

在图 20.1 内，輸入輸出端子上都接以理想变压器，这样可以作出一个二端网络，它的阻抗为

$$Z=Z_{11}a^2+2Z_{12}ab+Z_{22}b^2. \tag{20.1}$$

因此，电抗四端网絡的阻抗矩陣所必須滿足的条件是：对于任意实数 a 及 b，二次形式 (20.1) 是电抗函数。以后会知道，这也是实现的充分条件。这个条件可写成下列定理。

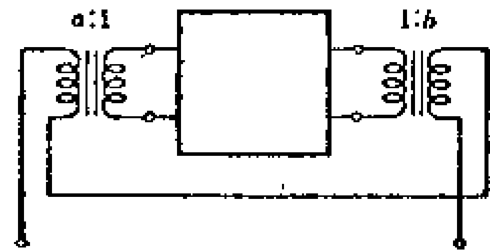


图 20.1

定理 20 为要 Z_{11}, Z_{12}, Z_{22} 是电抗四端网絡可实现阻抗矩陣的元素，必須而且只須它們具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}Z_{11}&=\frac{h_{11}^{(0)}}{\lambda}+\sum_1^n\frac{2h_{11}^{(\nu)}\lambda}{\lambda^2+\omega_\nu^2}+h_{11}^{(\infty)}\lambda,\\ Z_{12}&=\frac{h_{12}^{(0)}}{\lambda}+\sum_1^n\frac{2h_{12}^{(\nu)}\lambda}{\lambda^2+\omega_\nu^2}+h_{12}^{(\infty)}\lambda,\\ Z_{22}&=\frac{h_{22}^{(0)}}{\lambda}+\sum_1^n\frac{2h_{22}^{(\nu)}\lambda}{\lambda^2+\omega_\nu^2}+h_{22}^{(\infty)}\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{20.2}$$

并且成立下列关系：

$$h_{11}^{(\nu)},\quad h_{22}^{(\nu)}\geqslant 0,$$

$$h_{11}^{(\nu)}h_{22}^{(\nu)}-h_{12}^{(\nu)2}\geqslant 0\quad(\nu=0,1,\cdots,\infty). \tag{20.3}$$

上式內，一个极点的有关部分很容易实现成图 20.2 的形式。对于其他部分也一样，結果总的网絡是图 20.3 的形式。这就表明上述定理內的条件也是充分的。

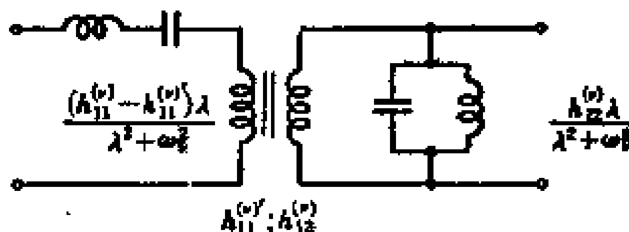


图 20.2

这就是 Cauer 証明的部分分式网絡，对于导納矩陣也能进行同样的操作，还可以对这两矩陣交替地采用这种分离方法，得出連分式形状的实现。

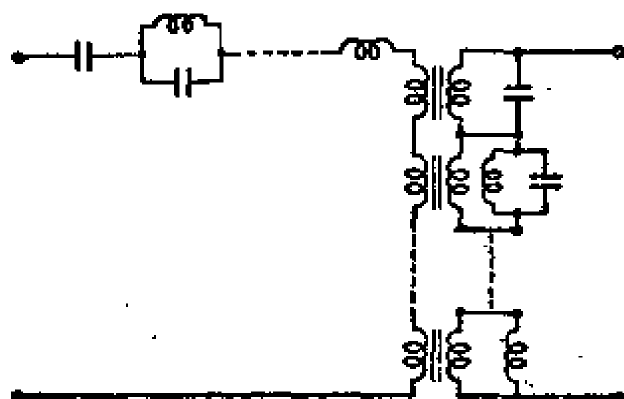


图　20.3

已經讲过，必須有三个函数才能規定一个四端网絡，但对于电抗四端网絡，只要有两个函数已足够了。这两个函数能有各种取法，其中之一是取 Z_{11} 和 $Z_{1K}(=Y_{11}^{-1})$。

从

$$\frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}=Z_{11}-Z_{1K} \tag{20.4}$$

看出，Z_{22} 的零点和极点必須与 $Z_{11}-Z_{1K}$ 的奇数阶的零点和极点相一致。由此可求出 Z_{22} 的所有的零点和极点。究竟哪一个是这种点，可从点前后的符号簡单地决定出来。这样，除一个一定的乘数以外，Z_{22} 是唯一确定的（Z_{12}^2 在虛軸上是負实数）。在 Z_{22} 决定以后，Z_{12} 除符号外也被唯一地决定出来。于是，定出分母和分子的最高次系数为1的 Z_{22}，令它为 Z_{220}，对应的 Z_{12} 为 Z_{120}，实际的 Z_{22} 和 Z_{12} 可表成

$$Z_{22}=k^2Z_{220}, \quad Z_{12}=kZ_{120}. \tag{20.5}$$

因此，根据 Z_{11}，Z_{1K} 和实常数 k，便能决定一个四端网絡。以上需要三个函数，但由于 Z_{11} 是电抗函数，給的是 $Z_{11}+k$ 一个函数，由此很容易把 Z_{11} 和 k 分开。

此外，根据§16所述的 M 和 N 或 S 和 T，也能作出这种規定。

其次簡单地讲一种重要的鎖联型实现方法。它适用于滤波器

構造的实現。假設給定了 Z_{11} 和 Z_{1K}。

(i) Z_{11} 和 Z_{1K} 有公共极点时，取留数中的小者为 h_1，作下列的分离：

$$Z_{11}^{(1)}=Z_{11}-\frac{2h_1\lambda}{\lambda^2+\omega^2}, \quad Z_{1K}^{(1)}=Z_{1K}-\frac{2h_1\lambda}{\lambda^2+\omega^2}. \tag{20.6}$$

这就分出了一个串联的电抗二端网絡。

(ii) 对于 $Z_{11}^{(1)-1}$ 和 $Z_{1K}^{(1)-1}$ 进行同样的操作，就分出一个并联的二端网絡。

(iii) 設不能进行上述分离的函数为 $Z_{11}^{(2)}$ 和 $Z_{1K}^{(2)}$，求

$$Z_{11}^{(2)}=Z_{1K}^{(2)} \tag{20.7}$$

的根。若根为純虚数 $j\omega_2$，則利用 Brune 的第 4 步，同样得出图 20.4 的网絡。其中

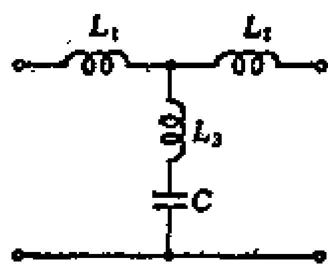


图 20.4

$$\left.\begin{aligned}&L_1=Z_{11}^{(2)}(j\omega_2)/j\omega_2,\\&L_2=\{Z_{11}^{(2)\prime}(j\omega_2)-L_1\}/2 \quad >0,\\&L_3^{-1}+L_1^{-1}+L_2^{-1}=0.\end{aligned}\right\} \tag{20.8}$$

若(20.7)的根为实数 σ，則可将上式內的 $j\omega_2$ 换成 σ，但 $L_2<0$。

对于复数根 $\mu+j\nu(\mu,\ \nu>0)$，則由下列各式：

$$\left.\begin{aligned}&Z_{11}^{(2)}(\mu+j\nu)\equiv\alpha+j\beta,\\&L_1=(\alpha\nu+\beta\mu)/2\mu\nu,\\&C_1^{-1}=(\alpha\nu-\beta\mu)(\mu^2+\nu^2)/2\mu\nu,\\&Z_{11}^{(2)\prime}(\mu+j\nu)-L_1+C_1^{-1}(\mu+j\nu)^{-2}\equiv(\gamma+j\delta)^{-1}/4,\\&L_3=1/\gamma,\\&C_3=-\{(\mu^2-\nu^2)\gamma+2\mu\nu\delta\}/(\mu^2+\nu^2)^2,\\&L_1^{-1}+L_2^{-1}+L_3^{-1}=0,\\&C_1+C_2+C_3=0,\\&C_4^{-1}=-L_3\{(\mu^2+\nu^2)^2L_3C_3+2(\mu^2-\nu^2)+(1/L_3C_3)\},\\&L_3L_4C_3C_4(\mu^2+\nu^2)^2=1\end{aligned}\right\} \tag{20.9}$$

求出各个元件，結果得到图 20.5 形式的网絡。它可以用图 20.6 那样的有全耦合綫圈的网絡实现出来。

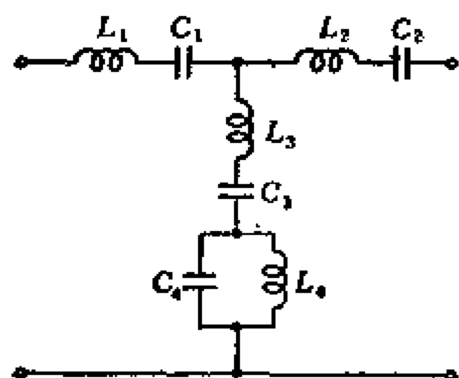


图 20.5

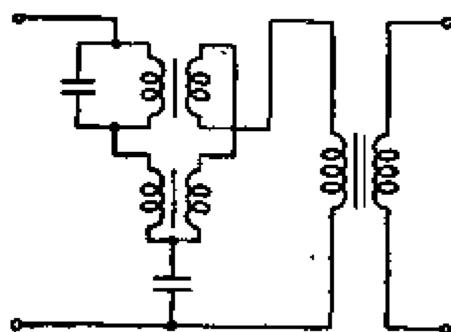


图 20.6

以上是鏈联型网絡的实現，最后，对应于(20.5)式内的 k，在終端留有一个未决定的理想变压器。

第4章　影象参数理論

§21　电抗四端网络的影象参数

傳輸四端网絡中特别重要的是具有高級特性的滤波器。影象参数理論是滤波器設計方法中最初完成的理論，与以后发展的工作特性理論相比較，由于它不能直接表示实际的特性，所以不是满意的理論，但在要求不高的情况下，由于它的簡单，即使在現在，它仍是很有用的。

对于滤波器，希望通带内的衰减小。于是要利用电抗网絡来构成，这是常識。所以这里討論一下电抗四端网絡的影象参数的性质。由于

$$\left.\begin{aligned}&Z_{01}=\sqrt{Z_{11}/Y_{11}},\ \ Z_{02}=\sqrt{Z_{22}/Y_{22}},\\&\coth\gamma=\sqrt{Z_{11}Y_{11}}=\sqrt{Z_{22}Y_{22}},\end{aligned}\right\}\tag{21.1}$$

Z_{01}，Z_{02}，$\coth\gamma$ 都是两个电抗函数的几何平均。这样的函数称为“Q 函数”。Q 函数在右半平面上正則。它的符号有正負两个，在正实軸上，Z_{11}，Z_{22}，Y_{11} 和 Y_{22} 是正实数，通常选定这个符号使 Q 函数为正实数比較方便。如果如此选擇，則假定 Z_{01} 在右半平面上，就有

$$|\arg Z_{01}|\leqslant\frac{1}{2}|\arg Z_{11}|+\frac{1}{2}|\arg Y_{11}|\leqslant|\arg\lambda|.$$

就是說，Q 函数也满足正实函数的条件。但它一般是无理函数，所以和集中参数的阻抗不同。

在虛軸上，由于 Z_{11} 和 Y_{11} 都是純虛数，所以当它們异号时 Z_{01} 为純虛数，同号时为正实数。Q 函数在虛軸上能取正实数和純虛数之值。Z_{01} 和 $\coth\gamma$ 之积，按照(17.6)，是一个电抗函数，所

以一个为純虛数时另一个是实数。这样两个函数称为相互共軛的 Q 函数。

根据以上的性质,实頻率軸可分成下列两种区域。

(i) Z_{01} 和 Z_{02} 为正实数, $\coth\gamma$ 为純虛数的区域。

(ii) Z_{01} 和 Z_{02} 为純虛数, $\coth\gamma$ 为正实数的区域。

对于后者, 又分为 Z_{01} 和 Z_{02} 同符号和异符号两种情况, 且由于 (17.6) 的 Z_{12} 必須为純虛数,所以又可分成

(a) Z_{01} 和 Z_{02} 同号时, $\coth\gamma\geqslant 1$ 的区域,

(b) Z_{01} 和 Z_{02} 异号时, $1\geqslant\coth\gamma\geqslant 0$ 的区域。

但由于

$$e^{2\gamma}=e^{2\alpha+j2\beta}=\frac{\coth\gamma+1}{\coth\gamma-1}, \tag{21.2}$$

且考慮到 $\coth\gamma$ 为正实函数,故在右半平面,

$$|e^{2\gamma}|\geqslant 1 \quad \text{即} \quad \alpha\geqslant 0,$$

衰減不能为負。特别在虛軸上(i)的区域內, 由于 $\coth\gamma$ 为純虛数,所以 $\alpha=0$, 完全沒有衰減。这个区域叫做**通带**。

如果是(ii)(a), 則 $e^{2\gamma}>1$, 即

$$\alpha>0, \quad \beta=k\pi \quad (k \text{ 为整数}),$$

这叫做**第一阻带**。

如果是(ii)(b), 則 $e^{2\gamma}<-1$, 即

$$\alpha>0, \quad \beta=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

这叫做**第二阻带**。

这种电抗四端网絡的特性具有明显的通带和阻带,在通带內,衰減完全等于零。但这是两个終端阻抗等于影象阻抗时的情况,实际上,由于普通都在一定电阻終端的情况下工作,所以实际的特性必須根据工作傳輸系数来計算。現在簡单地考慮这两个終端电阻都是 1 的实际特性。由 (16.6) 可得工作傳輸系数

$$S_b=\frac{1}{2}(A+B+C+D),\tag{21.3}$$

对于电抗四端网絡，在虚軸上，A 和 D 是实数，B 和 C 是虚数，所以

$$\begin{aligned}|S_b|^2&=\frac{1}{4}\{(A+D)^2-(B+C)^2\}\\&=1+\frac{1}{4}\{(A-D)^2-(B-C)^2\}\\&=1+\frac{1}{4}\left\{\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}-\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\right)^2\cosh^2\gamma\right.\\&\quad\left.-\left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}}-\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}\right)^2\sinh^2\gamma\right\}.\end{aligned}\tag{21.4}$$

但在通带内，$\gamma=j\beta$，所以上式括弧内成为

$$\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}-\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\right)^2\cos^2\beta+\left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}}-\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}\right)^2\sin^2\beta,$$

且由于 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，当 β 增加时，上式振动地取

$$\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}-\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\right)^2\quad 至\quad\left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}}-\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}\right)^2$$

之間的値，当 Z_{01} 和 Z_{02} 都接近于 1 时这两值很接近。就是說，在通带内，影象阻抗如果接近于两个終端电阻，則实际的衰减是很小的。

在第一阻带上，(21.4) 的括弧内成为

$$\left(\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}-\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\right)^2\cosh^2\alpha+\left(\left|\sqrt{Z_{01}Z_{02}}\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}\right|\right)^2\sinh^2\alpha,$$

而在第二阻带上，它成为

$$\left(\left|\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}\right|+\left|\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}\right|\right)^2\sinh^2\alpha+\left(\sqrt{Z_{01}Z_{02}}-\frac{1}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}\right)^2\cosh^2\alpha,$$

設 x 为正数，則由于

$$(x+x^{-1})^2\geqslant 4,$$

故

$$|S_b|^2 \geqslant 1+\sinh^2\alpha=\cosh^2\alpha>e^{2\alpha}/4.$$

即工作衰减比影象衰减不少于6分貝以上。因此在阻带上，一般不考虑影象阻抗，只希望影象衰减充分大。根据上述，設計濾波器时，可以在通带上使 Z_{01} 和 Z_{02} 与两个終端阻抗尽量接近，而在阻带上，使 $\coth\gamma$ 尽量接近于1。

可是，Piloty 曾研究过 Z_{01}，Z_{02} 和 $\coth\gamma$ 必須満足的条件。这就是

(i) $Z_{01}\coth\gamma$ 和 $Z_{02}\coth\gamma$ 都是电抗函数。

(ii) 对于正实数的 λ，$\coth\gamma \geqslant 1$。

(iii) $\coth\gamma=1$ 的根，除虚軸上的以外，都是偶数阶的。

(iv) 在 $\coth\gamma$ 为奇数阶1的第一阻带和第二阻带的分界点处，Z_{01} 和 Z_{02} 之中，有一个为0或 ∞，另一个为有限值。

虽然考虑这些条件可以进行上述的近似，但此时对于 Z_{01} 和 Z_{02}，分别考虑

$$Z_{01}=Z_{02} \qquad \text{以及} \qquad Z_{01}=R_0^2 Z_{02}^{-1}$$

更为方便。前者是对称濾波器的情况，后者是反对称的情况。对于这种网絡，(21.4)的括弧内有一項消失了，但与分别考虑的 Z_{01} 和 Z_{02} 相比，其他的特性并沒有变坏。

下面簡单地叙述实际的設計方法。

§22 定K型和m誘导型方法[1]

若有 n 个四端网絡鏈联，各联接点处的影象阻抗彼此相等，则全体可看成为一个四端网絡，它的影象阻抗为 Z_{01} 和 Z_{0n+1}，影象傳輸量是

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n. \tag{22.1}$$

[1] 这也叫作 Zobel 的方法。

这种由各个网絡的特性能够簡单地表示出全体的特性是影象参数的一个特征，也是 Zobel 方法的基础。若干个已知特性的簡单网絡的鏈联，可以得出高級的特性。这种基本的网絡就是“定 K 型”和“m 誘导型”。

a) **定 K 型** 图 22.1 的 L 型网絡，若满足下列关系：

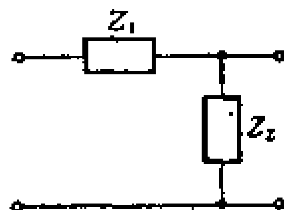


图 22.1

$$Z_1Z_2=R^2 \quad (R\ 为实常数), \tag{22.2}$$

则称为定 K 型网絡。

作为最簡单的情况，可以考虑 $Z_1=\lambda L$，$Z_2=1/\lambda C$，且設

$$\frac{L}{C}=R^2, \quad \frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0, \quad \Omega=\frac{\lambda}{j\omega_0}\left(=\frac{f}{f_0}\right),$$

则

$$\left.\begin{aligned} &Z_{0T}=R\sqrt{1-\Omega^2}, \quad Z_{0\pi}=R/\sqrt{1-\Omega^2}, \\ &\coth\gamma=\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{22.3}$$

就是說，这是截止频率为 $\Omega=1$ 的低通濾波器。但通帶內的影象阻抗不是一定的，阻帶內的衰減特性也不急峻。下面的 m 誘导型便能补这个不足。

b) ***m* 誘导型**

由于

$$Z_{01}=\sqrt{Z_{11}/Y_{11}}, \quad \coth\gamma=\sqrt{Z_{11}Y_{11}},$$

如果取参数为 $Z'_{11}=Z_{11}/m$，$Y'_{11}=Y_{11}/m$ 的网絡，則這个网絡的 Z_{01} 和原来的一样，但傳輸量变成下式中的 γ_m：

$$\coth\gamma_m=\frac{\coth\gamma}{m}. \tag{22.4}$$

这种网絡一般称为 m 誘导型网絡。

图 22.1 的 m 誘导型网絡如图 22.2 所示，且(22.3)式变成

$$\left.\begin{aligned} &Z_{0T}=R\sqrt{1-\Omega^2},\quad Z_{0\pi m}=R\frac{1-(1-m^2)\Omega^2}{\sqrt{1-\Omega^2}},\\ &\coth\gamma_m=\frac{1}{m}\sqrt{1-\frac{1}{\Omega^2}}. \end{aligned}\right\}\qquad(22.5)$$

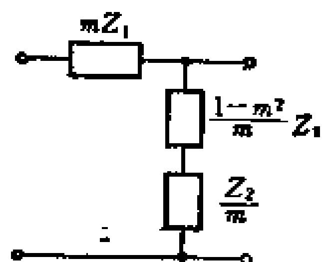


图　22.2

这个网絡在有限的频率下有一点可使衰減为无穷大(衰減极点)。这频率就是使 $\coth\gamma=1$ 的点，即

$$\Omega_\infty=\pm\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}.\qquad(22.6)$$

由此可知，若对 m 在0与1之間适当地选一个值，则可使衰減极点出現在阻带的任意点上。如果 m 值很小，则衰減极点接近截止频率，并且衰減急剧上升，而在較大的 Ω 值上，衰減变小。因此，如果取若干个不同 m 值的这种网絡，把它們在影象阻抗相匹配的情況下鏈联起来，则可得到总衰減很大并且急剧上升的一个网絡。

至于影象阻抗，当然 Z_{0T} 的一側等于定 K 型的特性阻抗，另一側的 $Z_{0\pi m}$，当 $m=0.6$ 附近时，在通带內很寬的范圍上比較接近于 R。亦就是說，m 誘导型在阻抗特性上有所改善。因此，制作上述的复合濾波器时，在它的两端，可以联接具有上述阻抗的网絡。

以上，我們在定 K 型的 Z_{0T} 側进行一定的变换，这就是所謂串联 m 变换，与此对应的，在 $Z_{0\pi}$ 側进行一定的变换，就得到并联 m 变换。

如果在这样得到的 m 誘导型网絡的 $Z_{0\pi m}$ 側再进行 m 变换，那末一定得到更高一級阻抗特性的网絡。但其衰減特性和一次变換的相同。

§23　对称和反对称濾波器

已經讲过，对称四端网絡可以用两个阻抗 Z_a 和 Z_b 表达出来。

由此算出的影象参数为

$$\left.\begin{aligned} Z_{01}=Z_{02}\equiv Z_0=\sqrt{Z_aZ_b},\\ 2\coth\gamma=\sqrt{Z_a/Z_b}+\sqrt{Z_b/Z_a}. \end{aligned}\right\} \tag{23.1}$$

从而得到

$$\coth\frac{\gamma}{2}=\sqrt{Z_a/Z_b}, \tag{23.2}$$

并可表成

$$Z_a=Z_0\coth\frac{\gamma}{2},\quad Z_b=Z_0\tanh\frac{\gamma}{2}. \tag{23.3}$$

但由于 Z_a 和 Z_b 是独立任意选取的阻抗，所以 Z_0 和 $\coth\frac{\gamma}{2}$ 除了相互必須为 Q 函数的这一限制外，其他完全是自由的。因此，通带上 Z_0 的逼近和阻带上 $\coth(\gamma/2)$ 的逼近是独立的。于是对于对称网絡，代替 $\coth\gamma$，我們考慮 $\coth(\gamma/2)$ [或 $\tanh(\gamma/2)$]，可使問題变得非常簡单。

对于截止(角)频率为 $\omega_0=1$ 的标称化的低通滤波器，首先考慮 Q 函数：

$$\left.\begin{aligned} Q_{2n}(\lambda)=H\sqrt{\lambda^2+1}\prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\omega_{2\nu}^2\lambda^2+1}{\omega_{2\nu-1}^2\lambda^2+1}\right),\\ Q_{2n+1}(\lambda)=H\sqrt{\lambda^2+1}\prod_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\omega_{2\nu+1}^2\lambda^2+1}{\omega_{2\nu}^2\lambda^2+1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{23.4}$$

$$1=\omega_0>\omega_1>\omega_2>\cdots>\omega_{2n+1}>0,\quad H>0.$$

如果适当地选擇各个 ω_μ 和 H，則在截止频率以下，可使所有这些 $Q_m(\lambda)$ 都接近于1，且❶

$$\left.\begin{aligned} Z_0(\lambda)=RQ_m(\lambda)\ \text{或}\ RQ_m(\lambda)^{-1},\\ \coth\frac{\gamma}{2}=Q_{m'}(\lambda^{-1}). \end{aligned}\right\} \tag{23.5}$$

---

❶ (23.5)式内 Q 函数的足标 m 表示 (23.4) 内的 $2n$ 或 $2n+1$；m' 表示与 m 不同的一个数。这里的 m 与上一节 m 誘导型的 m 以及 (23.6) 和以下的 m 各有不同的意义。——譯者注

这里可看出一个变换

$$m=\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{\lambda},\quad \text{即}\ \lambda^2=(m^2-1)^{-1}. \tag{23.6}$$

这是把 λ 平面虚軸上的通带映射到 m 平面的整个虚軸，即成为下列形式：

$$Q_{2n}(\lambda^{-1})=\frac{m}{H'}\prod_{1}^{n}\frac{m^2+a_{2\nu}^2}{m^2+a_{2\nu-1}^2}, \tag{23.7}$$

这对 m 而言是一个有理电抗函数。因此写出

$$e^{\gamma}=\frac{\coth(\gamma/2)+1}{\coth(\gamma/2)-1}=(-1)^{\mu}\frac{g(m)}{g(-m)}, \tag{23.8}$$

其中 μ 是 $g(m)$ 的次数，$g(m)$ 是 Hurwitz 多项式。但由于 λ 平面的阻带被映射到 m 平面上从 0 至 1 的一段实軸，所以衰减极点即 $\coth(\gamma/2)$ 在虚軸上阻带内等于 1 的点就是 $g(m)$ 在 0 至 -1 之間的实零点。于是得到

$$e^{\gamma}=\prod_{1}^{\mu}\frac{m+m_{\nu}}{m-m_{\nu}}\quad(0<m_{\nu}<1). \tag{23.9}$$

若設

$$e^{\gamma_{\nu}}=\frac{m+m_{\nu}}{m-m_{\nu}},$$

則

$$\coth\frac{\gamma_{\nu}}{2}=\frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{m_{\nu}\lambda}.$$

就是說，(23.9) 的 γ 和許多 m 誘导型网絡鏈联时的傳輸量是一致的。

因此，在这个式子内，可使 Q 函数在这实数域的任意点上等于 1. 又若利用橢圓函数，也能得到对 1 的 Tschebyscheff 近似，但在本书内，这些都省略了。

其次，在反对称滤波器的情况下，

$$Z_{01}Z_{02}=R_0^2, \tag{23.10}$$

阻带全部是第二阻带。因此在阻带内

$$\coth\gamma \leqslant 1, \tag{23.11}$$

$\coth\gamma=1$ 的零点是偶数次的。但在 $\lambda=\infty$，必须是奇数次的。由此容易知道，将有下列的形式：

$$e^{2\gamma}=\prod\left(\frac{m+m_\nu}{m-m_\nu}\right)^2\cdot\left(\frac{m+1}{m-1}\right). \tag{23.12}$$

以上所述的只是低通滤波器，其他的滤波器也可同样处理，还可以利用§32的频率变换。

第5章　工作特性理論

影象参数方法已經发展成为一个完善的理論体系，严格的 Tschebyscheff 特性也容易选擇出来。可是，影象特性并不代表实际使用状态下的特性。根据影象参数方法作出的最佳設計，从工作特性看来，必定不是最佳的。所以滤波器理論的下一个阶段，无論誰都会想到，必然是指定工作特性的設計。事实也正是如此，这一理論从 Brandt 的分波器理論开始以后，由 H. Piloty, W. Cauer, S. Darlington 等人几乎同时发展起来。下面叙述这一理論的概略。

§24　工作傳輸系数的性质

根据 §16 所述的定义，工作傳輸系数 $S_b(\lambda)$ 必須具有下列性质：

(i) $S_b(\lambda)$是一个在右半平面內沒有零点的实有理函数；

(ii) 它在虛軸上的絕对值必須不小于 1.

这就是 §8 所述的 S 函数的倒数。反之，如果給有滿足这些条件的函数，那末很容易說明具有这种工作傳輸系数的四端网絡是存在的。因为从 S 函数的性质，滿足

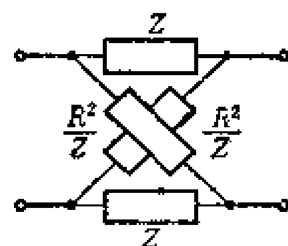


图　24.1

$$S_b(\lambda)=\frac{Z+R}{Z-R} \tag{24.1}$$

的 Z 将是一个正实函数，于是这样的 $S_b(\lambda)$ 不外乎实現成图 24.1 形式的网絡❶。

因此，$S_b(\lambda)$ 若写成形式

❶　参考(19.6)式。

$$S_b(\lambda)=\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}, \tag{24.2}$$

则由上述条件，$g(\lambda)$是一个 Hurwitz 多项式，$f(\lambda)$是次数不高于$g(\lambda)$的多项式。

其次，若写成

$$S_b(\lambda)=e^{\alpha+j\beta}, \tag{24.3}$$

则在虚軸上，$\alpha\geqslant 0$。对于正的常数 α_0，如果 $\alpha\geqslant\alpha_0$，则

$$S_{b1}(\lambda)=e^{\alpha-\alpha_0+j\beta} \tag{24.4}$$

仍能满足工作傳輸系数的条件。这对应于从二端阻抗內分出电阻的操作。此外，当 $S_b(\lambda)$ 在右半平面內具有极点时，已經讲过，S 函数可作下列形式的分解：

$$S_b(\lambda)=\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(-\lambda)}S_{b2}(\lambda), \tag{24.5}$$

$S_{b2}(\lambda)$在右半平面內沒有极点。其中 $\varphi(\lambda)$是 Hurwitz 多项式，

$$S_{b0}(\lambda)\equiv\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(-\lambda)} \tag{24.6}$$

在虚軸上的絕对值等于1,这样对应的网絡，称为**全通网絡**。(24.5)式表示分出一个全通网絡作为鏈联的网絡。由于 $S_{b2}(\lambda)$ 与 $S_b(\lambda)$ 具有相同的衰减特性，这个操作相当于二端网絡情况下的电抗分离。但 $S_{b2}(\lambda)$ 在右半平面內沒有极点，所以再分出以上的全通网絡是不可能了。现在若将 $S_b(\lambda)$的零点和极点各写成 λ'_ν 和 λ''_μ，则

$$\arg S_b(\lambda)=\sum_\nu^n\arg(\lambda-\lambda'_\nu)-\sum_\mu^m\arg(\lambda-\lambda''_\mu),$$

当 λ 在虚軸上从 $-j\infty$ 变到 $+j\infty$ 时，$\arg(\lambda-\lambda_0)$ 的值在 λ_0 位于左半平面內时增加 π，而当 λ_0 在右半平面內时减少 π。所以 $S_b(\lambda)$的相位变化量在右半平面內沒有极点的情况下为最小，等于$(n-m)\pi$。这里的$(n-m)$表示无穷远点处极点的阶数。因此，这样的网絡叫做**最小相移网絡**。

以上讲了工作傳輸系数的性质，至于电压傳輸系数和电流傳輸系数的性质几乎也是如此，只需用“不为零的正常数 C”代替以前条件(ii)內的1.

§25 电抗四端网絡的傳輸系数

这里为了簡单起見，設两个終端电阻都是1，且从 Cauer 研究的电流和电压傳輸系数出发。首先，由(16.1)式，电流傳輸系数等于

$$M(\lambda)=\frac{1+Z_{22}}{Z_{12}}. \tag{25.1}$$

在它的分子和分母上同乘以 Z_{22} 的分母多項式，則变成

$$M(\lambda)=\frac{g_m(\lambda)}{f_m(\lambda)}, \tag{25.2}$$

$g_m(\lambda)$是 Hurwitz 多項式，$f_m(\lambda)$ 是次数不高于 $g_m(\lambda)$ 的偶或奇多項式。其中，分母和分子的公因子并不約去。下面为了簡单起見，在沒有特别必要的时候，将 $M(\lambda)$，$g(\lambda)$各記为 M，g，将 $M(-\lambda)$，$g(-\lambda)$各記为 M_*，g_*.

可是，如果給定了(25.2)形式的函数，則能証明具有这样的电流傳輸函数的电抗四端网絡是存在的。我們可将分子分成偶部和奇部：

$$g_m=v_m+u_m. \tag{25.3}$$

若 f_m 为偶多項式，則取

$$Z_{22}=v_m/u_m,\quad Z_{12}=f_m/u_m,$$

若 f_m 为奇多項式，則取

$$Z_{22}=u_m/v_m,\quad Z_{12}=f_m/v_m; \tag{25.4}$$

由于 Z_{22} 是电抗函数，Z_{12} 为除 Z_{22} 的极点外沒有其他极点的奇函数，所以具有这种参数的电抗四端网絡是可实現的。可是，单从 Z_{22} 和 Z_{12} 还不能唯一地决定这个网絡，这种网絡的 Z_{11} 一般为下

列的形式：

$$Z_{11}=Z_{110}+Z, \tag{25.5}$$

其中 Z_{110} 是对 Z_{22} 和 Z_{12} 而言能滿足§20的留数条件的最小电抗，Z 为任意的电抗。(25.4)还可化为下列形式：

$$Z_{22}=\frac{M+M_*}{M-M_*},\quad Z_{12}=\frac{2}{M-M_*}. \tag{25.6}$$

同样，对于电压傳輸系数，亦有

$$N=\frac{1+Y_{22}}{-Y_{12}}=\frac{g_s}{f_s}, \tag{25.7}$$

$$Y_{22}=\frac{N+N_*}{N-N_*},\quad Y_{12}=\frac{-2}{N-N_*}. \tag{25.8}$$

如果 M 和 N 两者都已規定，则网絡亦唯一地决定了。但是，由(25.6)和(25.8)，它的鏈联矩陣为

$$K=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}N+N_* & N-N_*\\ M-M_* & M+M_*\end{pmatrix}, \tag{25.9}$$

其中 M 和 N 不能独立地决定出来，它們之間必須有下列的关系。关系之一为：表示輸入阻抗的函数

$$Z=\frac{N}{M} \tag{25.10}$$

是一个正实函数，还有一个互易性的条件 $|K|=1$，卽

$$MN_*+M_*N=2. \tag{25.11}$$

如果取 M 和 N 的分母的最小公倍多項式为 f，且写成

$$M=m/f,\quad N=n/f, \tag{25.12}$$

则四端网絡由三个多項式 m，n 和 f 所决定。于是，实现条件可化为

(i) m，n 和 f 在右閉半平面內沒有公共零点；

(ii) $Z=n/m$ 为正实函数；

(iii) f 是偶或奇多項式；

(iv)　　$$mn_* + m_* n = 2ff_*. \tag{25.13}$$

由此推知，鏈联矩陣为

$$K = \frac{1}{2f}\begin{pmatrix} n \pm n_* & n \mp n_* \\ m \mp m_* & m \pm m_* \end{pmatrix}, \tag{25.14}$$

其中 f 为偶时取上面的符号，f 为奇时取下面的符号。

其次考虑工作傳輸系数。比較(16.6)式，可得

$$S_b = \frac{M+N}{2} = \frac{m+n}{2f} = \frac{g}{f}, \tag{25.15}$$

其中

$$g = (m+n)/2 \tag{25.16}$$

是一个 Hurwitz 多項式。因为

$$Z+1 = \frac{m+n}{m}$$

是正实函数，且在虛軸上沒有零点，因此，如果 $m+n$ 在右閉半平面內有零点，那末 m 必須有同样的零点。从面 n 也必須有同样的零点，在(25.13)內 f 也要有这种零点。这就違反了条件(i)。

单是 N 不能完全决定一个四端网絡，必須与 M 組合以后始能完全决定，現在再考慮一个与 S_b 对应的反射傳輸系数 T 是方便的。由(16.7)，可写出

$$T = \frac{N+M}{N-M} = \frac{n+m}{n-m} = \frac{g}{h}, \tag{25.17}$$

其中

$$h = (n-m)/2. \tag{25.18}$$

这样，S_b 和 T 由三个多項式 g，h 和 f 所决定。反之，由此可求出 n 和 m：

$$\left.\begin{aligned} n &= g+h, \\ m &= g-h. \end{aligned}\right\} \tag{25.19}$$

如果把它們代入(25.13)式內，則得

$$gg_* = hh_* + ff_*. \tag{25.20}$$

上式也可写成

$$(S_b S_{b*})^{-1} + (TT_*)^{-1} = 1, \tag{25.21}$$

它說明傳輸到輸出端的功率与輸入端反射的功率之和等于电源供給的功率，亦就是說，四端网絡內沒有功率消耗。

可是，多項式 m, n 和 f 可以表成 g, h 和 f，所以对于 g, h 和 f，可直接写出实現条件是

(i) g 为 Hurwitz 多項式；

(ii) f 为偶或奇多項式；

(iii) $gg_* = hh_* + ff_*$.

其次，如果令

$$\varphi = h/f, \tag{25.22}$$

則有

$$S_b S_{b*} = 1 + \varphi\varphi_*. \tag{25.23}$$

由于在虛軸上，

$$e^{2\alpha} = 1 + \varphi(j\omega)\varphi(-j\omega), \tag{25.24}$$

所以，四端网絡的衰減特性完全被 φ 規定出来。因此，設計濾波器等时，只需要求出具有給定衰減特性的 φ，由此就可求出滿足实現条件的 S_b。根据这种意义，φ 可叫做**特性函数**。为了求出可实現的 S_b 的条件，由下面的敘述可知，必須φ为实系数的有理函数，此外沒有任何其他的限制。

給定一个实系数有理函数 φ 后，在它的分母分子上乘以适当的多項式，可使分母成为偶或奇多項式，其中取最低次的为 f_0，則

$$\varphi = \frac{h_0}{f_0}. \tag{25.25}$$

这里 f_0 的最高次項的系数設为正。对于这个 h_0 和 f_0，由(25.20)式可求出 Hurwitz 多項式 g_0. 此时，相应于 g_0 的最高次項系数为 1 的 h_0 和 f_0 就决定出来。

因此，根据这样的 φ，可以唯一地求出 g_0, h_0 和 f_0，同样，利用 φ，可以求出一般的函数为

$$\left.\begin{aligned} &h=\pm h_0\psi\psi_*,\quad f=\pm f_0\psi\psi_*,\\ &\qquad g=g_0\psi^2,\\ \text{从而}\\ &S_b=\pm S_{b0}\psi/\psi_*,\quad T=\pm T_0\psi/\psi_*. \end{aligned}\right\}\tag{25.26}$$

其中 ψ 是最高次系数为 1 的任意 Hurwitz 多項式。結果，电抗四端网絡由一个任意的实系数有理函数 φ 及一个 Hurwitz 多項式 ψ 决定出来。

具有这个特性函数的 M, N, Z_{11} 和 Z_{22} 可写成

$$M=S_b-\varphi,\quad N=S_b+\varphi,\tag{25.27}$$

$$Z_{11}=\frac{S_b+S_{b*}+\varphi+\varphi_*}{S_b-S_{b*}-\varphi+\varphi_*},\quad Z_{22}=\frac{S_b+S_{b*}-\varphi-\varphi_*}{S_b-S_{b*}-\varphi+\varphi_*}.\tag{25.28}$$

由此知道，如果令

$$S_b\to S_b,\quad \varphi\to-\varphi_*,$$

那末，Z_{11} 和 Z_{22} 互换，变成互换輸入和輸出端。因此，

$$\varphi_*=-\varphi,\tag{25.29}$$

即 φ 为奇函数时，这表示为一个对称四端网絡。若

$$\varphi_*=\varphi,\tag{25.30}$$

即 φ 为偶函数时，则

$$\Delta_Z=\frac{S-S_*+\varphi-\varphi_*}{S-S_*-\varphi+\varphi_*}=1,\tag{25.31}$$

这是反对称四端网絡。

在对称的情况下，又可分成下列两种：

(i) f 为偶，h 为奇。

$$\left.\begin{aligned} &gg_*=f^2-h^2,\\ &(Z)=\frac{1}{u-h}\begin{pmatrix} v & f\\ f & v\end{pmatrix},\quad (Y)=\frac{1}{u+h}\begin{pmatrix} v & -f\\ -f & v\end{pmatrix}. \end{aligned}\right\}\tag{25.32}$$

(ii) f 为奇，h 为偶。

$$\left.\begin{aligned} &gg_* = -f^2+h^2, \\ &(Z) = \frac{1}{v-h}\begin{pmatrix} u & f \\ f & u \end{pmatrix}, \quad (Y) = \frac{1}{v+h}\begin{pmatrix} u & -f \\ -f & u \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (25.33)$$

在反对称情况下，f 和 h 都是偶函数，故

$$\left.\begin{aligned} &gg_* = f^2+h^2, \\ &(Z) = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} v+h & f \\ f & v-h \end{pmatrix}, \quad (Y) = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} v-h & -f \\ -f & v+h \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \quad (25.34)$$

以上是一个要領，如果决定了一个具有給定特性的 φ（或直接为 S_b），則由此求网絡綜合上必要的阻抗矩陣等量时，只需进行机械的計算即可。

§26 在二端网絡綜合理論上的应用

应用工作特性理論，可以合成一个电阻終端的电抗四端网絡形式的二端网絡。

假設給定一个阻抗

$$Z = \frac{n_0}{m_0},$$

作出 $m_0 n_{0*} - m_{0*} n_0$。由于它在虛軸上不为負，所以虛軸上的零点是偶数阶的。如果在虛軸以外有奇数阶的零点，則将左半面的零点集合成一个 Hurwitz 多項式 g_0，取

$$n = g_0 n_0, \quad m = g_0 m_0,$$

再分解成

$$mn_* - m_* n = 2ff_*,$$

其中 f 为偶或奇多項式。由于这样求出的 m，n 和 f 滿足电抗四端网絡的条件，因此，可以作出这个网絡，再在它的終端接一个电阻，就得到了实现給定 Z 的网絡。

第6章 逼近理論

§27 逼近的意义和方法

网絡設計的一个重要部分是逼近理論。这就是利用适当个数的元件来实現网絡函数，而决定与希望的特性尽量逼近的特性的問題。这是經常要考慮并且是非常困难的問題，要一般地討論几乎是不可能的。說起来，逼近本身就是一个不明确的概念，象最佳逼近是什么，很难作出籠統的規定，卽使可以規定，要求出在規定的标准上是最佳的，一般也不容易。比較簡单和可以得到解答的，只是象濾波器那样极特殊的情况。当然，对于一般的特性，逼近理論已經研究得很多，考慮了多項式逼近，正交函数逼近，应用位論的逼近等等，这里只能簡单地介紹其中的一部分。

网絡特性在不預先告訴时可以用傳輸系数表出，視情况的不同，采用这种傳达函数的倒数是方便的。

由于所給的仅是普通实频率的特性，所以取 ω 比 λ 更方便。此外，它的特性多半只是指定衰減特性，在这种情况下，可以考虑所謂振幅的平方特性 $|S_b|^2=e^{2\alpha}$，对它可以用 ω 的有理偶函数来逼近。

还有，对于給定的函数 F，一般用 F^+ 表示逼近的有理函数。

§28 Fourier 級数

正交函数的方法是逼近的有效手段，在网絡函数的情况下，所得的函数必須是有理函数。因此在多数情况下，需要进行适当的变量变换才能达到目的。Fourier 級数的情况可分为下列两种：

(i) 逼近范圍为有限的情况。为了簡单起見，取 $-1<\omega<1$

为逼近范圍，并作变换

$$\omega=\sin(\theta/2), \tag{28.1}$$

把它变换到 $-\pi<\theta<\pi$ 范圍上。由于振幅平方特性是 ω 的偶函数，所以利用 Fourier 余弦級数可作出下列形式的逼近：

$$e^{2\alpha}\doteq\sum_0^n c_\nu\cos\nu\theta. \tag{28.2}$$

但由 (28.1)，可写出

$$e^{j\theta/2}=j(\omega+\sqrt{\omega^2-1}),\quad e^{-j\theta/2}=-j(\omega-\sqrt{\omega^2-1})$$

以及

$$\cos\nu\theta=(-1)^\nu\{(\omega+\sqrt{\omega^2-1})^{2\nu}+(\omega-\sqrt{\omega^2-1})^{2\nu}\}/2, \tag{28.3}$$

这是 ω 的有理偶多項式。实际上，它是偶次的 Tschebyscheff 多項式。因此，这个方法就是在 Tschebyscheff 多項式上的逼近。

(ii) 逼近范圍为全部頻率的情况。此时可以用变换

$$\omega=\tan(\theta/2) \tag{28.4}$$

把 $-\infty<\omega<\infty$ 变到 $-\pi<\theta<\pi$，然后再用 Fourier 余弦級数来逼近。

这种情况还有逼近 $e^{2\alpha}$ 与 $e^{-2\alpha}$ 之分，通常取后者。可是由 (28.4)，

$$e^{j\theta}=\frac{1+j\omega}{1-j\omega}, \tag{28.5}$$

于是可得

$$\cos\nu\theta=\frac{(1+j\omega)^{2\nu}+(1-j\omega)^{2\nu}}{2(1+\omega^2)^\nu}. \tag{28.6}$$

这是 ω 的实系数偶有理函数。然而，利用这种逼近所得的函数，由上式可知，只在 $\omega=\pm j$ (即 $\lambda=\pm1$)处有极点。为了避免它，我們可以預先在需要逼近的函数上乘以

$$\frac{\sum^n a_\nu\omega^{2\nu}}{(1+\omega^2)^n} \tag{28.7}$$

形式的函数，如果再用它除上述方法所得的逼近函数，则就把最后結果的分母作成 $\sum a_\nu \omega^{2\nu}$ 形式。但若对这个多项式的选擇不作什么規定，则好好的 Fourier 級数也会使效果減半。到现在，还沒有好的选擇多項式的簡单方法，有一个方法是先对給定特性的倒数用上述方法进行逼近，再把所得的函数作为(28.7)的函数使用。

以上只对傳輸系数(或傳达函数)的絕对值进行逼近，亦就是沒有相位問題的逼近方法，Redheffer 曾发表了同时逼近傳达函数的实部和虛部的方法。这方法是用

$$e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta=\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \tag{28.8}$$

的冪級数来逼近傳达函数 $e^{-\gamma}$，取

$$e^{-\gamma}=A(\theta)-jB(\theta)$$

并求出使

$$T=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left[\left\{A(\theta)-\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\cos\nu\theta\right\}^2+\left\{B(\theta)-\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\sin\nu\theta\right\}^2\right]d\theta \tag{28.9}$$

为最小的 a_ν。这也是求解方程組 $\partial T/\partial a_\nu=0$。

§29 位論的应用

平面上一点处的二維电位可表成

$$V=-\sum q_\nu\log\rho_\nu+\text{常数}, \tag{29.1}$$

其中 q_ν 是点电荷(正确地說，是和这平面直交的綫电荷的密度)，ρ_ν 是各个电荷至观测点之間的距离。在这平面上，考慮一个能适当地决定坐标的复数平面，取各个电荷的坐标为 λ_ν，观测点的坐标为 λ，再考慮函数

$$W=-\sum q_\nu\log(\lambda-\lambda_\nu)+\text{常数}, \tag{29.2}$$

它的实部就是(29.1)所示的电位。亦即是可以写出

$$W=V+j\Psi. \tag{29.3}$$

它的虚部叫做**流函数**。

W 称为**复数电位**，它是解析函数，所以能够满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}=-\frac{\partial V}{\partial\omega}=E_\omega,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial\omega}=\frac{\partial V}{\partial\sigma}=-E_\sigma. \tag{29.4}$$

这里 E_ω 和 E_σ 各表示相应方向上的电場强度。

利用流函数，穿过平面上两点 λ_0 和 λ 間联綫的通量可表成下列形式：

$$\Phi=\int_{\lambda_0}^{\lambda}(-E_\omega d\sigma+E_\sigma d\omega)=\int\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}d\sigma-\frac{\partial\Psi}{\partial\omega}d\omega\right)$$
$$=\Psi(\lambda_0)-\Psi(\lambda). \tag{29.5}$$

現設电荷分布在图 29.1 所示的綫段上，$q(\lambda)$表示由 λ_0 至 λ 之間的电荷。在这条綫的两侧，电位是連續的，流函数不連續。令 Ψ_1 表示其一侧的值，Ψ_2 表示另一侧的值，则在图示的 λ_0 至 λ 間的綫段上計算通量，采用 Gauss 定理，得到

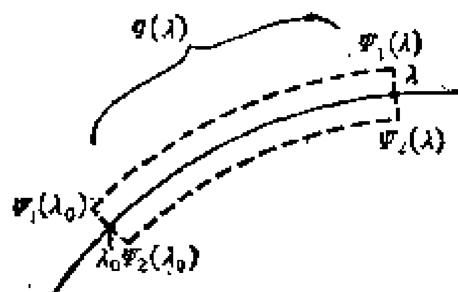


图 29.1

$$\{\Psi_1(\lambda)-\Psi_1(\lambda_0)\}-\{\Psi_2(\lambda)-\Psi_2(\lambda_0)\}=2\pi q(\lambda). \tag{29.6}$$

于是从流函数可求出电荷分布。

可是，若傳輸系数的零点为 λ_1', λ_2', …，极点为 λ_1'', λ_2'', …，则傳輸量函数可写成

$$\gamma=F(\lambda)=\log K\frac{(\lambda-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')\cdots}{(\lambda-\lambda_1'')(\lambda-\lambda_2'')\cdots}$$
$$=\gamma_0+\sum\log(\lambda-\lambda_\nu')-\sum\log(\lambda-\lambda_\nu''). \tag{29.7}$$

把它和(29.2)式相比較，可以知道有下列的对应关系：

傳輸量函数——复数电位，

衰减量——电位，

相位量——流函数，

零点——单位負电荷，

极点——单位正电荷。

傳輸量的逼近問題，就是决定正負电荷的分布問題，使虛軸上的电位(或流函数)逼近給定的特性。其中，根据傳輸系数的性质，要求有下面的条件：

(i) 电荷是关于实軸对称地分布着的，

(ii) 負电荷限在左半平面內，

(iii) 有限范圍的总电荷量必須不为正。

特别对于只是衰减量問題的情况，右半平面內出現負电荷沒有什么区别。原因是可以把这些电荷对虛軸对称地搬至左半平面，仍得出与衰减沒有影响但满足条件的函数。或者相当于利用偶函数逼近 $e^{2\alpha}$，可以用左右对称的电荷分布来逼近 2α。

可是，决定这种电荷分布的步驟，归結于下列两个阶段。第一，利用平面上适当綫段(例如包圍逼近区域的閉曲綫)上的連續电荷分布，对特性进行逼近；第二，用单位点电荷分布来代替这种連續电荷。这就是把綫段分为若干部分，取这区間上的电荷量为单位量，再用区間中央的单位点电荷代替。进行第一步时，首先在包圍逼近区域的适当边界綫的內部作出适当的正則逼近函数

$$F_i(\lambda)=V_i(\lambda)+j\Psi_i(\lambda).$$

它可以是冪級数或其他函数。其次作出外部函数

$$F_e(\lambda)=V_e(\lambda)+j\Psi_e(\lambda),$$

在边界綫上取 $V_i(\lambda)=V_e(\lambda)$，且在外部区域上正則或定出有多少个对数奇点。于是从(29.6)，由 Ψ_i 和 Ψ_e 求出边界綫上的电荷分布。

与这問題相当的，是屢見的利用所謂保角映射能够簡单地解

出来的問題。这种例子，将在§30的 Tschebyscheff 型滤波器部分内說明。

以上叙述了两种一般的逼近方法，对于具有象滤波器等单純形式特性的一类問題，还可求出一些表成公式的函数。下面讲述有关它的几件事。

§30 滤 波 器

在滤波器、分波器等問題中，大多数情况只是实頻率上的衰减特性問題。此时取

$$S_b S_{b*} = 1 + \varphi\varphi_* \tag{30.1}$$

的表达形式，由于在虚軸上的通帯内希望 $\varphi\varphi_*$ 尽可能地小，在阻帯内，希望它尽可能地大，所以 $\varphi\varphi_*$ 的零点和极点都在虚軸上(包括无穷远点)是最有效的。如果这样选擇，則 φ 是偶或奇的有理函数，一般可表成

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= h\frac{(\lambda^2+\omega_1^2)\cdots(\lambda^2+\omega_n^2)}{(\lambda^2+\omega_{\infty 1}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{\infty m}^2)}, \\ \text{或}\quad \varphi &= h\frac{\lambda(\lambda^2+\omega_1^2)\cdots(\lambda^2+\omega_n^2)}{(\lambda^2+\omega_{\infty 1}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{\infty m}^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{30.2}$$

在不需要考虑复数平面的时候，λ 可用 ω 表出，

$$\varphi(j\omega)\ \varphi(-j\omega) = \varphi_1(\omega)^2, \tag{30.3}$$

即 $\qquad \varphi_1(\omega) = \varphi(j\omega) \quad \text{或} \quad j\varphi(j\omega)$

是 ω 的偶或奇的实系数有理函数。

下面，我們举出几个有代表性的特性函数。为了方便，只限于討論低通滤波器。对于高通或带通滤波器，可以利用§32所述的頻率变换，也可以不用頻率变换，要推广一些想法也是容易的。

(i) Wagner 特性[1]。这是在逼近点附近具有最平坦性质的

[1] 这里采用滤波器的发明者 K. W. Wagner 的名字。美国和英国的文献中常称为 Butterworth 特性。

特性，亦即是，在这一点上的导数以及到某个可能限定的高阶导数都等于零。对于低通滤波器，就是下列的形式：

$$\varphi(\omega)=(\omega/\omega_0)^n. \tag{30.4}$$

特性函数的零点集中在频带的中心。在上式內，衰减极点都集中在无穷远点，所以阻带也具有 Wagner 特性。

(ii) Tschebyscheff 特性。

这里关于 Tschebyscheff 逼近的意义先作简单的說明。此时表征逼近的良好程度的标准是取所考虑区域上的最大偏差。因此，用一个含有若干个自由参数的函数 F 逼近一个給定的函数 F_0 时，就是去决定指定范圍上使 $\max|F-F_0|$ 的值为最小的各个参数。如此得出的函数偏差如图 30.1 所示，在指定范圍上，当然如想象的那样，其中等于最大值的数目至少与参数的数目有关。

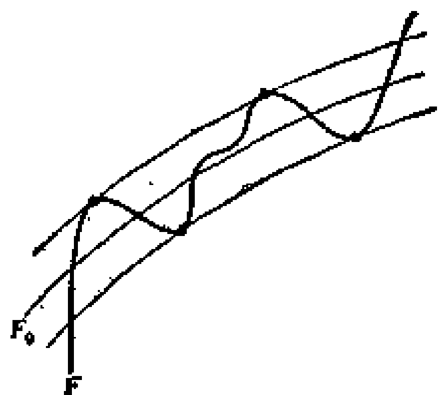


图　30.1

在滤波器的情况下，在通带上希望逼近于零，在阻带上希望逼近于 ∞，在这两个带上的逼近将在以后叙述，現在先考虑只对通带的逼近。这里为了簡单起見，衰减极点都假定在无穷远点，亦就是特性函数可以表成多項式的情况，于是从通带內偏差的各个极大值全相等的条件，列出微分方程再求解，也可以利用下面的位論方法求出解答。

首先，利用变换

$$\lambda=\sinh p \quad (\omega=\sin\theta,\ p=j\theta) \tag{30.5}$$

把整个 λ 平面映射到图 30.2 的带状部分。(上式是周期函数，所以正确地說，映射到它的上下都有相同幅度的带状部分。) 这样就把通带 $(-j,+j)$ 映射到 p 平面上 $\left(-j\frac{\pi}{2},+j\frac{\pi}{2}\right)$(正确地說，整个虛軸)。可是，如果把电荷均匀分布在 p 平面的虛軸上，那末就有一

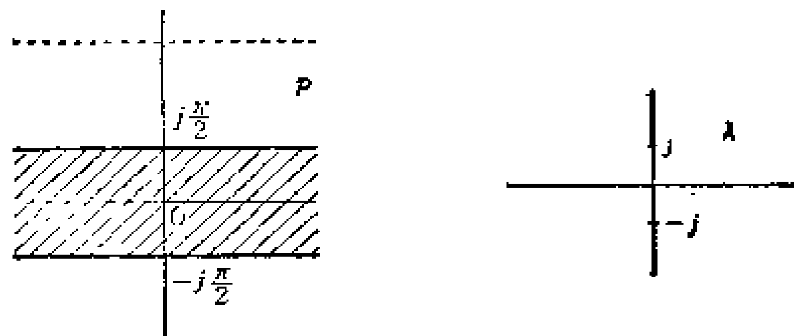


图 30.2

定的电位。若把$(-j\pi/2, +j\pi/2)$区間分成n等分，在各个中点放置单位电荷来逼近連續的电荷，則虚軸上的电位就成为 Tschebyscheff 型的。此时可得下列函数：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\lambda)=H\prod_1^m(\lambda^2+\omega_\nu^2),\\&\qquad\omega_\nu=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\nu-1}{2m}\quad(n=2m),\\ \text{或}\quad&\\&\varphi(\lambda)=H\lambda\prod_1^m(\lambda^2+\omega_\nu^2),\\&\qquad\omega_\nu=\sin\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\nu}{2m+1}\quad(n=2m+1).\end{aligned}\right\}\tag{30.6}$$

但 $\sinh p$ 函数的零点在虚軸上等間隔地排列着，在有限区域內，它是正則函数。另一方面，电荷也在虚軸上等間隔地分布着，它們的間隔設为$1/n$，則可写出

$$\left.\begin{aligned}&n\text{ 为偶数时}\qquad\varphi(\lambda)=H'\cosh np,\\&n\text{ 为奇数时}\qquad\varphi(\lambda)=H'\sinh np.\end{aligned}\right\}\tag{30.7}$$

这是一种中間变量的形式。

如果取变量ω为

$$\omega=\cos\theta,\tag{30.8}$$

則不拘n的偶或奇，都可表成

$$\varphi_1(\omega)=H'\cos n\theta,\tag{30.9}$$

这里

$$T_n \equiv \cos n\theta = \frac{1}{2}\{(\omega+\sqrt{\omega^2-1})^n+(\omega-\sqrt{\omega^2-1})^n\} \quad (30.10)$$

即是所謂 Tschebyscheff 多項式。

求出了这种特性函数，其次从

$$S_b S_{b*} = 1+\varphi\varphi_*$$

来求出 S_b，这可将右边进行因式分解，象下面那样求出来。例如，n 为奇数时，在表示 $\sinh^2 np$ 在 p 平面上零点的图 30.3 虚軸上，二重零点在 $\pm j\nu\pi/n$，若在其上加一个常数，取 $c^2+\sinh^2 np$ 形式，c^2 从零逐渐增加，则图中的零点将向左右一条直綫上移动。因此，$1+H^2\sinh^2 np$ 的零点是 $\pm a\pm j\nu\pi/n$ 的形式。把它在 λ 平面排

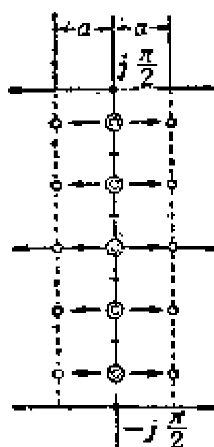


图 30.3

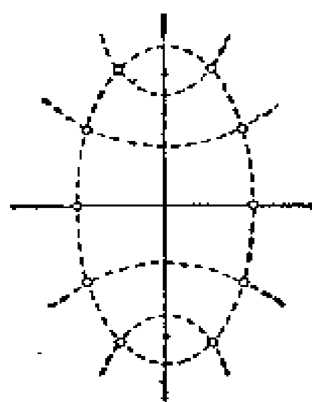


图 30.4

列于图 30.4 的椭圓上，和 § 30 所述的方法相比，正好相当于椭圓包圍了通带，椭圓內有一定的电位，椭圓周上分布着电荷且已被量子化。因此，单考虑左半面 S_b 的零点，成为

$$-\sinh(a\pm j\nu\pi/n). \quad (30.11)$$

由此得出

$$\left.\begin{aligned} &S_b = A(\lambda+a_0)\prod(\lambda^2+2a_{2\nu}\lambda+\rho_{2\nu}^2),\\ &a_0=\sinh a,\\ &a_{2\nu}=a_0\cos\frac{\nu\pi}{n},\\ &\rho_{2\nu}^2=a_0^2+\sin^2\frac{\nu\pi}{n}. \end{aligned}\right\} \quad (30.12)$$

按照(30.5)，

$$p=\sinh^{-1}\lambda, \tag{30.13}$$

这不外是定 K 型的影象傳輸量。于是 np 表示 n 个定 K 型鎖联网絡的影象傳輸量。一个四端网絡的影象傳輸量一般取为 P 时，考虑

$$\varphi=H\cosh P \quad 或 \quad \varphi=H\sinh P. \tag{30.14}$$

由于在通帶上 P 为純虛数，φ 就在 $\pm H$ 之間振动，成为 Tschebyscheff 特性，而在阻帶上，它的絕对值比 H 大，特别在衰減极点处，它成为 ∞。可是这样的函数，要成为特性函数，必須是有理函数。但由

$$\cosh P=\frac{\coth P}{\sqrt{\coth^2 P-1}}, \quad \sinh P=\frac{1}{\sqrt{\coth^2 P-1}}, \tag{30.15}$$

为了使它为有理函数，$\coth P$ 在虛軸上的单位点必須是偶数阶的，又在通帶和阻帶的边界上，左式的情况下必須为 ∞，右式的情况必須为零。換言之，为了使 $\cosh P$ 成为有理函数，阻帶必須全是第一阻帶，为了使 $\sinh P$ 为有理函数，必須只有第二阻帶。前者是对称滤波器的傳輸量，后者是反对称的傳輸量。利用(23.6)表出的 m，在对称的場合，由于

$$e^{2P}=\prod\left(\frac{m+m_i}{m-m_i}\right)^2, \tag{30.16}$$

所以

$$\cosh P=\frac{\prod(m+m_i)^2+\prod(m-m_i)^2}{\prod(m^2-m_i^2)}. \tag{30.17}$$

在反对称的場合，由于

$$e^{2P}=\prod\left(\frac{m+m_i}{m-m_i}\right)^2\cdot\left(\frac{m+1}{m-1}\right), \tag{30.18}$$

所以

$$\sinh P=\lambda\frac{(m+1)\prod(m+m_i)^2-(m-1)\prod(m-m_i)^2}{\prod(m^2-m_i^2)}, \tag{30.19}$$

于是从一个滤波器的影象傳輸量，导出了 Tschebyscheff 型特性函数。此时，所取的滤波器称为**参考滤波器**。利用这种方法，可以設計出任意点上有极点的、在通带上为 Tschebyscheff 特性的滤波器。如果取阻带上 Tschebyscheff 特性的滤波器为参考滤波器，则通带和阻带上都能具有 Tschebyscheff 特性，这就导出下面要讲的位論。

(iii) 联合 Tschebyscheff 特性。这对于滤波器而言是最希望有的特性，由于篇幅的限制，这里只說明其要点[1]。

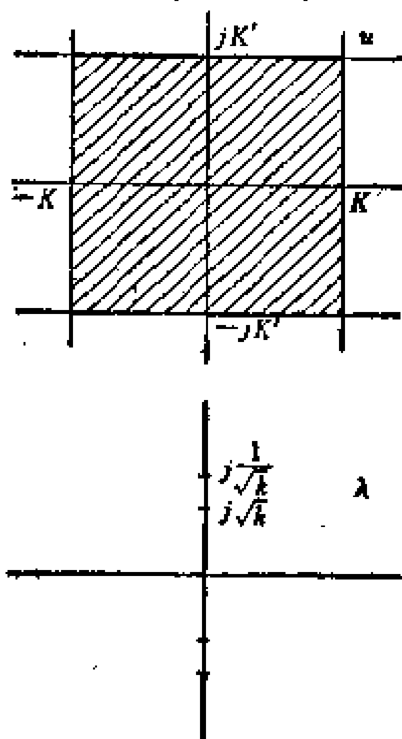


图 30.5

首先，取 $0 \leqslant \omega \leqslant \sqrt{k}$ 为通带，$1/\sqrt{k} \leqslant \omega$ 为阻带。这个 k 称为**频带系数**。这里可以考虑椭圓函数

$$\lambda = j\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(u,\ k) \quad (30.20)$$

的映射，图 30.5 那样的整个 λ 平面被变换到 u 平面的 $\pm K$，$\pm jK'$ 之間的矩形区域。（正确地說，还有这区域的上下左右周期地反复。）通带映射到实軸上，阻带映射到通过 $\pm jK'$ 的与实軸平行的直綫上。如果考虑和以前同样的电荷且把它量子化，則結果特性函数的零点在 $n=2m$ 时为

$$\left.\begin{aligned} &\pm j\Omega_{2\nu-1} = \pm j\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\nu-1}{n}K,\ k\right) \quad (\nu=1,2,\cdots,m), \\ &\text{极点为} \\ &\pm j\Omega_{\infty,\,2\nu-1} = \pm j\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\nu-1}{n}K + jK',\ k\right) \\ &\qquad = \pm j/\Omega_{2\nu-1}. \end{aligned}\right\} \quad (30.21)$$

[1] 关于这里的公式推导，有兴趣的讀者可参考 W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1954 年，第二版第六章。——譯者注

于是

$$\varphi=H\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\lambda^2+\Omega_{2\nu-1}^2}{1+\Omega_{2\nu-1}^2\lambda^2}\right), \tag{30.22}$$

而在 $n=2m+1$ 时，

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=H\lambda\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\lambda^2+\Omega_{2\nu}^2}{1+\Omega_{2\nu}^2\lambda^2}\right),\\&\Omega_{2\nu}=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2\nu}{n}K,\ k\right).\end{aligned}\right\} \tag{30.23}$$

又和推导(30.7)式一样，可得到中間变量形式:

n 为奇数时，

$$\varphi=H'\sqrt{k_1}\,\mathrm{sn}\left(n\frac{K_1}{K}u,k_1\right),$$

n 为偶数时，

$$\varphi=H'\sqrt{k_1}\,\mathrm{sn}\left(n\frac{K_1}{K}u+K_1,k_1\right). \tag{30.24}$$

其中 $\mathrm{sn}(\cdots,\ k_1)$ 是满足

$$K_1'/K_1=nK'/K \tag{30.25}$$

的并取 K_1 和 K_1' 的椭圆函数。

最后，可求出与(30.12)对应的 S_b:

n 为奇数时，

$$S_b=A(\lambda+a_0)\prod_{\nu=1}^{m}\frac{\lambda^2+2a_{2\nu}\lambda+\rho_{2\nu}^2}{1+\omega_{2\nu}^2\lambda^2},$$

n 为偶数时，

$$S_b=A\prod_{\nu=1}^{m}\frac{\lambda^2+2a_{2\nu+1}\lambda+\rho_{2\nu+1}^2}{1+\omega_{2\nu+1}^2\lambda^2}. \tag{30.26}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&a_0=-j\sqrt{k}\ \mathrm{sn}\ (ja,\ k),\\&a_\nu=\frac{a_0\,\mathrm{cn}\,(\nu K/n,\ k)\,\mathrm{dn}\,(\nu K/n,\ k)}{1+a_0^2\omega_\nu^2},\\&\rho_\nu^2=\frac{a_0^2+\omega_\nu^2}{1+a_0^2\omega_\nu^2}.\end{aligned}\right\} \tag{30.27}$$

§31　頻率变换

1) 頻带的变换　为了簡单起見，以上全限于討論低通型的滤波器，对于高通和带通型的，也适用同样的方法。但在高通和上下特性对称的带通情况下，利用頻率变换，可以簡单地由低通的情形推导出来。頻率变换的原理是“如果把一个网絡的网絡函数的变量 λ 用任意正实函数 $Z(\lambda)$ 代替，則具有代替后网絡函数的网絡依然存在”，这只要考慮网絡的电感换成 $Z(\lambda)\ L$形式的阻抗，电容换成 $\dfrac{1}{Z(\lambda)C}$ 形式的阻抗，就能明白。由此知道，頻率变换不仅不是新的网絡函数，就是网絡构造也是从原来結构推导出来的。

首先，从基准的低通滤波器推导高通滤波器时，可利用变换

$$\lambda=\frac{\omega_c}{\lambda'}\quad\left(\omega=\frac{-\omega_c}{\omega'}\right)\tag{31.1}$$

把范圍 $0<\omega<1$ 变换到 $\omega_c<\omega'$ 的范圍。在网絡构造上，則是 L 和 C 的变换。

对于带通滤波器，利用

$$\lambda=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\lambda'^2+\omega_0^2}{\lambda'}\quad\left[\omega=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\omega'}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega'}\right)\right],\tag{31.2}$$

則变换到 $\omega_1<\omega'<\omega_2$ 的范圍，其中 $\omega_0^2=\omega_1\omega_2$。在网絡构造上，$L$ 变成串联共振回路，C 变成并联共振回路。

2) 損耗的影响及其补償方法　L 或 C 具有損耗时，它們的阻抗通常变成 $\lambda L+r$，$1/(\lambda C+g)$ 的形式。假定网絡內全部元件的 r/L 和 g/C 的値都等于一定值 δ，則有这种元件的网絡函数就是把沒有損耗时的函数內的 λ 换成 $\lambda+\delta$ 所得的函数。現在考慮在这种变换下傳輸特性如何变化。根据正則函数的性质，由于

$$\frac{d\gamma}{d\lambda}=\frac{d\gamma}{dj\omega}=-j\frac{d\alpha}{d\omega}+\frac{d\beta}{d\omega},$$

可写出

$$\Delta\alpha \doteqdot \delta\frac{d\beta}{d\omega}, \quad \Delta\beta \doteqdot -\delta\frac{d\alpha}{d\omega}. \tag{31.3}$$

即衰减特性(相位特性)的变化随相位特性(衰减特性)的急峻程度而增大。

此外，用这种变换时，网絡函数的零点和极点向左侧移动δ，所以預先把設計好的函数零点和极点向右移动δ，再綜合此函数的网絡，就可以糾正損耗的影响。可是傳輸系数的零点不能在右半平面，所以也不能任意向右移动。由于移动衰减极点的影响比較小，普通只对零点进行补償。

3) 反对称滤波器的頻率变換 对于Tschebyscheff型反对称滤波器❶，由(30.7)或(30.24)知道，$\lambda=0$时衰减不为零，所以在两个終端电阻相等的情况下，有一側需要一个理想变压器。但如果对最低的衰减零点$j\Omega_1$进行如下的变換：

$$\lambda'^2=\frac{\lambda^2+\Omega_1^2}{1-\Omega_1^2}, \tag{31.4}$$

則截止頻率几乎依旧如此，但Ω_1变換到原点。对于联合Tschebyscheff特性，变換

$$\lambda'^2=\frac{\lambda^2+\Omega_1^2}{1+\Omega_1^2\lambda^2} \tag{31.5}$$

能将最高的衰减极点同时变換到无穷远点，这是很方便的❷。

§32 延迟网絡

在理想的延迟网絡中，对于輸入信号$f(t)$，輸出信号必須为$f(t-t_0)$。因此，对于$e^{j\omega t}$，輸出为$e^{j\omega(t-t_0)}$，傳輸系数可表成

❶ 从(25.31)知道，特性函数是偶数次的。

❷ 关于这种变換，讀者可参閱 W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, 1954 年，第二版第八章。以及陆志刚，用工作参数理論設計滤波器，(一)(二)，电信科学，1960 年，4 期，5、6 期。——譯者注

$$S_b(j\omega)=e^{j\omega t_0}\quad [S_b(\lambda)=e^{\lambda t_0}],\tag{32.1}$$

即

$$\alpha=0,\quad \beta=\omega t_0.\tag{32.2}$$

可是，这个傳輸系数不是有理函数，不能用有限多个元件集中参数的网絡实現出来。用这个式子还不便求近似的有理函数，通常变成下列形式比較方便❶：

$$\frac{S_b-1}{S_b+1}=\tanh \lambda t_0.\tag{32.3}$$

这是无限次的电抗函数，因为可以展成下列一些式子：

$$\left.\begin{aligned}
\tan\lambda t_0&=\frac{\lambda t_0\{(\lambda t_0)^2+\pi^2\}\{(\lambda t_0)^2+(2\pi)^2\}\cdots}{\left\{(\lambda t_0)^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}\left\{(\lambda t_0)^2+\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2\right\}\cdots} &&\text{(a)}\\
&=\frac{2\lambda t_0}{(\lambda t_0)^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{2\lambda t_0}{(\lambda t_0)^2+\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2}+\cdots &&\text{(b)}\\
&=\frac{1}{\frac{1}{\lambda t_0}+\frac{2\lambda t_0}{(\lambda t_0)^2+\pi^2}+\cdots} &&\text{(c)}\\
&=\frac{1\rfloor}{\left|\frac{1}{\lambda t_0}\right.}+\frac{1\rfloor}{\left|\frac{3}{\lambda t_0}\right.}+\frac{1\rfloor}{\left|\frac{5}{\lambda t_0}\right.}+\cdots. &&\text{(d)}
\end{aligned}\right\}\tag{32.4}$$

如果把它終止在有限次上，則就作出了有理的电抗函数。反之，由此可求出 S，則在有限頻率范圍上得出逼近 $e^{\lambda t_0}$ 的有理函数。此时，究竟利用以上哪一个展开式，要视逼近的形式而异。例如，对于(a)，在

$$\omega t_0=0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{2},\ \cdots,\ \frac{n\pi}{2}$$

的点上，β 与 ωt_0 一致，对于(d)，則在 $\omega=0$ 附近有最佳的逼近，即

$$\beta/\omega=t_0+c_n\omega^n+c_{n+1}\omega^{n+1}+\cdots.$$

❶ $\tanh\lambda t_0$ 应改为 $\tanh\lambda\frac{t_0}{2}$。——譯者注

以上簡单地考虑了傳輸系数$e^{\lambda t_0}$的有理函数逼近，关于延迟网絡的逼近理論，严格的方法是规定它的群延迟时間。这就是喜安的展开方法，現在单从方法上說明他的想法。

一般情况下，在頻率ω下有相位延迟时間

$$t(\omega)=\beta/\omega, \tag{32.5}$$

关于能量的傳播时間，則必須取群延迟时間

$$t(\omega)=d\beta/d\omega. \tag{32.6}$$

这里定义一个复数群延迟时間

$$\tau(\lambda)=\frac{d\gamma}{d\lambda}=\frac{\partial\beta}{\partial\omega}-j\frac{\partial\alpha}{\partial\omega}. \tag{32.7}$$

它的实部表示群延迟时間，虛部代表衰減量的变化，我們希望它在全部頻率范圍上逼近一个实常数t_0。可是

$$\tau(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\log S_b(\lambda)=\frac{S'_b(\lambda)}{S_b(\lambda)}$$

$$=\frac{1}{\lambda-\lambda'_1}+\frac{1}{\lambda-\lambda'_2}+\cdots-\frac{1}{\lambda-\lambda''_1}-\frac{1}{\lambda-\lambda''_2}-\cdots, \tag{32.8}$$

其中λ'_ν为零点，λ''_ν为极点。利用它可以进行 Wagner 逼近和 Tschebyscheff 逼近，前者的解答与以上(d)的結果相同，后者不幸不能解出一般的形式，只能在次数較低的情况下求出計算式❶。

§ 33 时間域上的逼近理論

以上所述的全是网絡的頻率特性逼近理論。可是，設計网絡时，往往不限于給定頻率特性。在电视和脉冲通信等里面，时間波形很重要。然而，时間域特性經过 Fourier 变換就变成頻率域特

❶ 可参閱 E. Ulbrich und H. Piloty, Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne Approximierten konstanter Gruppenlaufzeit, A. E. Ü. 14(1960), 451~467，以及 Th.-A. Abele, Übertragungsfaktoren mit Tschebyscheffscher·Approximation konstanter Gruppenlaufzeit, A. E. Ü. 16 (1962), 9~18.——譯者注

性，此时，頻率域上的最佳逼近，不一定是时間域上的最佳逼近，所以，也希望直接进行时間域上的逼近。这比頻率域上的逼近，一般要困难些。还因为考慮到网絡的实現性，主要是頻率函数的方法，所以时間域的逼近也常要想到它的頻率函数的性质。这个問題有許多人研究过，現在讲一点以正交函数的 Kautz 方法为中心的几件有趣的事。

傳輸函数是只在左半面有极点的有理函数，所以它的脉冲响应必須是下列形式的函数之和：

$$c_\nu e^{-\sigma_\nu t}\cos(\omega_\nu t+\theta_\nu),\quad \sigma_\nu>0. \tag{33.1}$$

反之，对应于这种函数之和的傳輸函数也滿足实現条件。于是对这样的函数取一个正交函数集 $\{\phi_\nu(t)\}$，即选取

$$\int_0^\infty \phi_\nu(t)\phi_\mu(t)\,dt=\begin{cases}0 & (\nu\neq\mu),\\ 1 & (\nu=\mu)\end{cases}$$
$$(\nu,\ \mu=1,\ 2,\ \cdots), \tag{33.2}$$

对于給定的脉冲响应 $k(t)$，若求

$$c_\nu=\int_0^\infty k(t)\phi_\nu(t)\,dt\quad (\nu=1,\ 2,\cdots n), \tag{33.3}$$

則可得出近似的脉冲响应为

$$k_n(t)=\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\phi_\nu(t). \tag{33.4}$$

按照正交函数的性质，它是誤差

$$\varepsilon_n^2=\int_0^\infty \{k(t)-k_n(t)\}^2dt \tag{33.5}$$

为最小的函数。

在所作的正交函数集内，可利用下列性质：

$$\int_0^\infty \phi_\nu(t)\phi_\mu(t)\,dt=\int_{-j\infty}^{j\infty}\Phi_\nu(\lambda)\Phi_\mu(-\lambda)\,d\lambda, \tag{33.6}$$

其中 $\Phi_\nu(\lambda)$ 是对应于 $\phi_\nu(t)$ 的傳輸函数。为了簡单計，傳輸函数的极点全部限在負实軸上，且若选擇

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(\lambda)&=\sqrt{2\alpha_1}\,\frac{1}{\lambda+\alpha_1},\\ \Phi_2(\lambda)&=\sqrt{2\alpha_2}\,\frac{\lambda-\alpha_1}{(\lambda+\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Phi_n(\lambda)&=\sqrt{2\alpha_n}\,\frac{(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)\cdots(\lambda-\alpha_{n-1})}{(\lambda+\alpha_1)(\lambda+\alpha_2)\cdots(\lambda+\alpha_n)},\end{aligned}\right\}\tag{33.7}$$

则 $\Phi_\nu(\lambda)\Phi_\mu(-\lambda)$ 形式的积 $(\nu\neq\mu)$ 在左或右某个半平面内沒有极点，由于它在无穷远点有二阶零点，所以(33.6)等于零，这就証明了它們的正交性。在复数根的場合，可設

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_{2\nu-1}(\lambda)\\ &\Phi_{2\nu}(\lambda)\end{aligned}\right\}=\sqrt{2\alpha_\nu}\,\frac{(\lambda\pm|\lambda_n|)\prod\limits_{i=1}^{\nu-1}\{(\lambda-\alpha_i)^2+\beta_i^2\}}{\prod\limits_{i=1}^{\nu}\{(\lambda+\alpha_i)^2+\beta_i^2\}}.\tag{33.8}$$

其中复号的“+”对于 $\Phi_{2\nu-1}$ 而“−”对于 $\Phi_{2\nu}$ 而言，$\lambda_\nu=\alpha_\nu+j\beta_\nu$。若取所得 $\{\Phi_\nu\}$ 的 Laplace 反变换，則就得出了正交函数集 $\{\phi_\nu\}$。

可是，决定这种函数是根据极点的选擇方法，逼近的好坏有很大的出入，所以需要对給定的函数选擇适当的极点。方法之一为在 $\lambda=0$ 附近把給定的 $f(t)$ 的 Laplace 变換 $F(\lambda)$ 展开成連分式

$$F(\lambda)=\frac{b_0|}{|1}+\frac{b_1\lambda|}{|1}+\frac{b_2\lambda|}{|1}+\cdots,\tag{33.9}$$

并且切取它的有限多項，得出逼近有理函数的极点。

此外，作为一个特殊情况，可以考慮 $\lambda=-a$ 处的多重极点，作出一系列函数

$$\Phi_\nu(\lambda)=\sqrt{2a}\,\frac{(\lambda-a)^{\nu-1}}{(\lambda+a)^\nu}.\tag{33.10}$$

与此相当的 $\phi_\nu(t)$ 卽是

$$\phi_\nu(t)=\sqrt{2a}\,(-1)^{\nu-1}e^{-at}L_{\nu-1}(2at),\tag{33.11}$$

其中 L_ν 是 Laguerre 多項式。

关于求逼近有理函数的方法，除这里所述的正交函数方法之

外，还有很多。一种方法也是切取 (33.9) 連分式的有限多項，設为

$$H^{+}(\lambda)=\frac{a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n}{b_0+b_1\lambda+\cdots+b_m\lambda^m}\quad(n\geqslant m),\qquad(33.12)$$

把它和 $H(\lambda)$ 的展开式

$$H(\lambda)=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots\qquad(33.13)$$

相比較，利用下列的系数間关系式：

$$\left.\begin{array}{l}a_0=b_0c_0,\\ a_1=b_0c_1+b_1c_0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\qquad(33.14)$$

就可求出未定系数 $a_0, a_1, \cdots, b_0, b_1, \cdots$。但为了利用这种方法，必須首先求出 (33.13) 那样的展开式，为此如果把图 33.1 (a) 的脉冲响应近似地表成图 (b) 的脉冲序列，

$$h(t)\doteqdot\sum_{\nu=0}^{\infty}h_\nu\delta(t-\nu\Delta t),\qquad(33.15)$$

则得

$$H(\lambda)\doteqdot\sum_{\nu}h_\nu e^{-\nu(\Delta t)\lambda},\qquad(33.16)$$

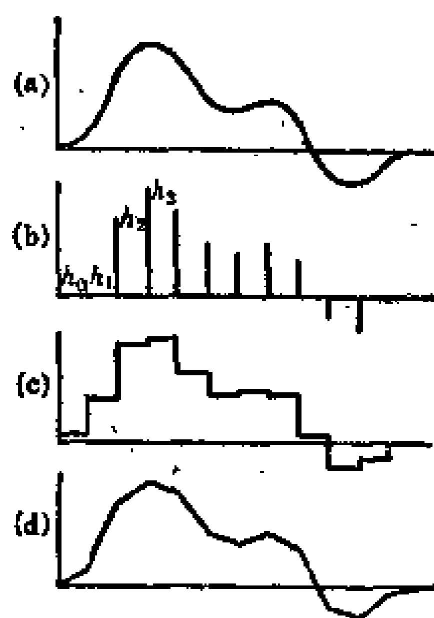


图 33.1

再利用展开式

$$e^{-\nu(\Delta t)\lambda}=\sum_{\mu}\frac{1}{\mu!}\{-\nu(\Delta t)\lambda\}^{\mu}\qquad(33.17)$$

就可求出它来。

在近似地表示时間函数时，除了脉冲序列以外，还可以利用图 33.1(c) 和 (d) 那样的阶梯函数、折綫或二次曲綫等进一步近似。在这些情况下，例如在脉冲序列情况下，也不一定需要等間隔，可以按照波形，某些地方分得細一点，某些地方間隔大一些。若把

这些近似曲綫进行若干回微分，則可得出一个脉冲序列。例如在折綫的情况下，可写出

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) \doteqdot \sum_{\nu} h_{\nu}'' \cdot \delta(t-t_{\nu}), \tag{33.18}$$

由此得到

$$H(\lambda) \doteqdot \frac{1}{\lambda^2}\sum h_{\nu}'' e^{-t_{\nu}\lambda}. \tag{33.19}$$

用它代替(33.16)就可以了。

以上，讲述了給定脉冲响应时的逼近方法，还有在指定的輸入波形 $i(t)$ 和指定的輸出波形 $v(t)$ 的情况下求网絡。此时，$i(t)$ 和 $v(t)$ 都表成脉冲序列，把 $I(\lambda)$ 和 $V(\lambda)$ 用 $e^{-\Delta t}$ 的冪級数展开，只取多項式，然后就能求出 $V(\lambda)/I(\lambda)$。

第7章 特殊网絡

本章內，我們要簡单地讲述 RC 网絡、分布参数网絡和非互易网絡。RC 网絡是一种普通的集中参数网絡，但它有新的理論，由于內容編排上的緣故，現在亦放在这里。

§34 *RC* 网 絡

在电抗滤波器的情况下，它的元件总有某种程度的損耗，如果設計得不恰当，則很容易使通带內的衰减稍稍增大，截止特性的急峻程度变坏。所以就出現了在元件的損耗非常大时，甚至沒有电感只有 R 和 C 时，特性如何变化的問題。关于这一点，1949 年 Guillemin 証明，除了有一定的衰减外，可以作出一个不平衡型的 RC 网絡，它的特性能够不論多少地逼近任意的衰减特性，不久，許多人注意了这个問題，这个理論也有了很大的进展。RC 网絡的特点是适用于极低頻率，它和需要大电感的 LC 网絡比較起来，不仅經济并且正确，比較容易实現。缺点当然是衰减大，但在放大技术很进步的今天，这算不得是个問題。另一缺点是，要得到急剧变化的特性，元件需要得相当多。

利用和放大器組合的 RC 网絡的特点时，在它的結构上，再加下面两个限制比較妥当：

(i) 不含理想变压器的純 RC 网絡。

(ii) 不平衡的四端网絡(即有一根公共归綫)。

但不幸，这种形式实現的必要和充分条件还不知道。只是尾崎給出了一两个充分条件。

不問它的构造如何，用导納参数表出时，RC 网絡必須滿足的

条件是:

$$Y_{ij}=a_{ij}^{(\infty)}\lambda+a_{ij}^{(0)}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_{ij}^{(\nu)}\lambda}{\lambda+c_\nu}\quad (i, j=1, 2), \tag{34.1}$$

$$a_{11}^{(\nu)}\geqslant 0,\quad a_{11}^{(\nu)}a_{22}^{(\nu)}-a_{12}^{(\nu)2}\geqslant 0\quad (\nu=0, 1, \cdots, n, \infty),$$

$$c_\nu>0\quad (\nu=1, 2, \cdots, n). \tag{34.2}$$

如果准許使用理想变压器,則和 *LC* 网絡有同样的綜合方法,这个条件就是充分条件。但有上述的限制,問題就难了。尾崎的一个充分条件是:

(i) $Y_{11}=Y_{22}$,亦就是一个对称四端网絡,

(ii) 写成 $Y_{12}=\dfrac{-G_{12}(\lambda)}{F(\lambda)}$ 时,G_{12} 除正常数外,是一个在右半平面沒有零点的正系数多項式。(亦就是一个最小相移网絡。)

下面簡单地讲述这个綜合方法。首先假定留数的行列式不等于零,从 Y_{11} 和 Y_{22},适当地分出导納,使成为零。其次在不破坏上述条件的范圍上,就分出了一个矩陣

$$\begin{pmatrix} Y_2 & Y_2 \\ Y_2 & Y_2 \end{pmatrix}.$$

对于阻抗參数,可以同样进行以上的步驟。如果这些步驟都不可能,那末还是能够在滿足上述的条件的范圍上,适当地把 Y 矩陣进行和式分解,使每一个在形式上都变得簡单。此时 Y_{12} 分子多項式的零点要和极点相一致,或者最高次項的系数为零。如果依下法进行,这总是可能的。亦就是 Y_{12} 的零点不管是不是在虛軸上或是左半面內,都可以分解到負实軸上,因为

$$G_{12}=(\lambda^2+a^2)g_{12}=\lambda^2 g_{12}+a^2 g_{12},$$

$$\{(\lambda+a)^2+b^2\}g_{12}=(\lambda+c_s)(\lambda+d)g_{12}+x_0 g_{12},$$

$$(\lambda+a)g_{12}=x_s(\lambda+c_s)g_{12}+x_{s+1}(\lambda+c_{s+1})g_{12},$$

$$(c_s<a<c_{s+1}).$$

尾崎又把条件作如下的推广。綜合的方法也大致相同。

(i) $(Y_{11}-Y_{12}):(Y_{22}-Y_{12})=n:1$, $n>0$.

(ii) 和以上的条件(ii)相同。

可是，RC 网絡的特性往往用电压傳輸系数或电流傳輸系数的形式来規定。这可使問題簡化，并且还有一个理由是在和放大器組合时，电子管的阳极側近似于定电流源，而对于阴极跟随器，近似于定电压源。

現設电压傳輸系数由下式給出：

$$N\left(=\frac{V_1}{V_2}=\frac{1+Y_{22}}{-Y_{12}}\right)=\frac{q(\lambda)}{p(\lambda)}, \tag{34.3}$$

其中，RC 网絡的条件要求 q 的零点限在負实軸上，又为了滿足尾崎的条件，p 的零点不在右半平面內。要实現这个 N 的充分条件簡单地还表不出来，但在实际問題中，由于与頻率无关的一定的衰减可以用放大器来补償，利用这一点，N 还是能实現的，亦就是去实現乘以常数后的 hN。当然，h 愈小，少用几个放大器就能做到，所以結果的問題是在实現可能的范圍上怎样选擇才能尽量使 h 减小。

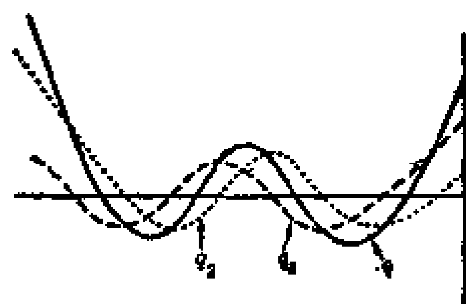


图　34.1

首先，由 N 求出导納参数，把 q 分解为

$$q=q_1+q_2, \tag{34.4}$$

q_1 和 q_2 都在負实軸上有单根，且彼此隔离。由图 34.1 看出，这总是可能的。如果 q_2 具有更接近于原点的零点，則由于

$$hN=\frac{1+q_2/q_1}{p/hq_1}, \tag{34.5}$$

于是

$$Y_{22}=q_2/q_1, \quad Y_{12}=p/hq_1\,. \tag{34.6}$$

这就决定了滿足以前关于留数实現条件的 h。

Guillemin 利用以上所得的 Y_{22} 和 Y_{12} 作为求网絡的方法，給出了梯子形网絡的并联构造。亦就是和二端网絡綜合理論中的宫田方法一样，把 Y_{22} 展成梯子形，如图 34.2 那样，經过适当的节数再按倒量展开，这种网絡的 Y_{12} 是下列的形式：

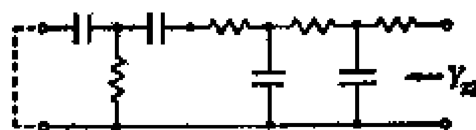


图 34.2

$$k_\nu\lambda^\nu/q_1,$$

把这些适当地組合起来，就可得出 p/hq_1。这时的 h 由于沒有求出网絡所以算不出来，对于 p 的条件也比尾崎的条件要弱，但只有正系数的多項式才行。

以上方法的缺点是 q 的分解不是唯一的，最佳的分解还不知道。

但这是就 N 的实現条件和实現方法而言，至于有关特性的逼近方法，还应指出，RC 网絡的重大限制是 N 的零点都限在負实軸上（无穷远点除外），因此与 LC 情况相比較要困难一些。即使采用第 6 章的 Fourier 級数方法的 (ii)，或是采用位論等有力的方法，也不能得出完全的 Tschebyscheff 特性的公式。此外，也可以适当地求出

$$\left\{\frac{1}{\lambda+c_\nu}\right\}$$

那样的函数集，并按此来考虑逼近的方法❶。

§35 分布参数网絡

这里不准备讲分布参数网絡的一般理論。只是简单地叙述元件和构造上有以下限制的且处理起来类似于集中参数网絡理論的理論体系。这些限制是下面三个条件：

---

❶ 例如参閱尾崎弘，藤澤俊男，RC 网絡的近似問題，电气通信学会杂志，36 (1953)，156～158。——譯者注

(i) 元件是不含損耗的;

(ii) 元件的电长度全部相等;

(iii) 沒有串联的构造。

条件 (i) 和集中参数情况下对于电抗网絡的限制是相同的。条件 (ii) 是使网絡函数成为簡单的形式，設长度为 l，現对图 35.1 那样的波动导納为 a 的元件列出傳輸綫方程，亦就是在(17.5)内代入 $Z_{01}=Z_{02}=a^{-1}$，$\gamma=j\beta$，可得



图 35.1

$$\left.\begin{aligned} V_1&=V_2\cos\beta l+jI_2/a\cdot\sin\beta l,\\ I_1&=jV_2a\sin\beta l+I_2\cos\beta l,\end{aligned}\right\}\quad\left(\beta=\frac{2\pi f}{c}\right). \qquad (35.1)$$

然而对于这个长为 1/4 波长的频率，即 $f_0=c/4l$，由于 $\beta l=\pi/2$，所以由这些元件构成的网絡特性是以 $(-f_0,\ f_0)$ 为基本周期的周期函数。利用变换

$$\lambda=j\tan\beta l=j\tan(\pi f/2f_0), \qquad (35.2)$$

可把 $(-f_0,\ f_0)$ 的区間变换到 $(-j\infty,\ j\infty)$ 范圍上。于是(35.1)的右边各系数即鏈联矩陣成为

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\begin{pmatrix}1 & \lambda/a\\ a\lambda & 1\end{pmatrix}. \qquad (35.3)$$

因此，元件一端短路和开路时，輸入导納各为

$$Y_{11}=\frac{a}{\lambda},\quad Y_{10}=a\lambda, \qquad (35.4)$$

这和集中参数情况下的电感和电容在形式上是相同的。由于存在了与电抗网絡的两个基本元件相当的元件，所以如果不限制联接形式，则不含互感的集中参数网絡的各个元件都可以换成分布参数的元件。但在分布参数网絡内，很难进行串联，因为平行綫情况有不平衡的輻射問題，同軸綫情况必須采用二重同軸。因此，复杂网絡的串联实际上是不大可能的。由于这个理由，加入了第三个

限制，于是简化了网絡构造。在集中参数場合中，不能考虑这种限制，但在分布参数場合中，元件本身就是四端网絡，它們的鏈联能够給出新的可能性。

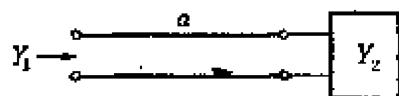


图 35.2

在图 35.2 内，若在波动导納为 a 的元件上联接一个导納 Y_2，則輸入导納是

$$Y_1(\lambda)=a\,\frac{Y_2(\lambda)+\lambda a}{a+\lambda Y_2(\lambda)},\tag{35.5}$$

这里 $Y_1(1)=a$. 由此得出

$$Y_2(\lambda)=Y_1(1)\,\frac{Y_1(\lambda)-\lambda Y_1(1)}{Y_1(1)-\lambda Y_1(\lambda)}.\tag{35.6}$$

按照 Richards 定理，如果 $Y_1(\lambda)$ 是正实函数，則 $Y_2(\lambda)$ 也是正实函数。从而得出下列定理：

定理 任意二端导納 $Y_1(\lambda)$ 总可以实現成波动导納为 $Y_1(1)$ 的元件和(35.6)导納的鏈联形式。

$Y_1(1)+Y_1(-1)=0$ 时，$Y_2(\lambda)$ 的次数比 $Y_1(\lambda)$ 的次数低一次。特别在电抗二端网絡的情况下，由于 $Y_1(\lambda)$ 是奇函数，通常这个关系是成立的，取出鏈联元件就使次数降低，結果有下列的系。

系 电抗二端网絡可以用数目等于它的次数的元件之鏈联实現出来。

在(35.6)内，有趣的是 $Y_1(\infty)=\infty$ 时 $Y_2(\infty)=0$，$Y_1(\infty)=0$ 时 $Y_2(\infty)=\infty$. 利用这种性质，对于图 35.3 所示的二端网絡(为了方便，二端元件仍采用集中参数相同的記号，下面也是这样)，首先把 $\lambda=\infty$ 的极点作为并联的电容分出，其次取出鏈联的元件，由于 $\lambda=\infty$ 又成为极点，所以下面可以反复这两个操作，結果实現成图 35.4 所示的沒有串联的网絡。

为了把这种方法推广到一般的二端网絡，我們再讲下面两种重要的变换。

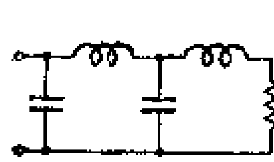


图 35.3

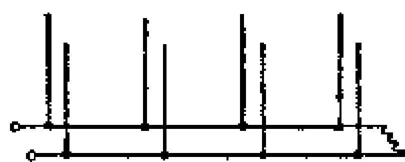


图 35.4

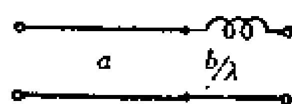


图 35.5

（i） 图35.5的四端网絡等效于图35.6的四端网絡，它們之間的变换公式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
c&=\frac{a^2}{a+b}, \quad d=\frac{ab}{a+b};\\
a&=c+d, \quad b=d^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{35.7}
$$

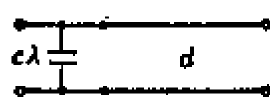


图 35.6

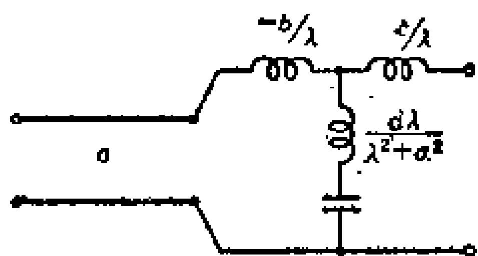


图 35.7

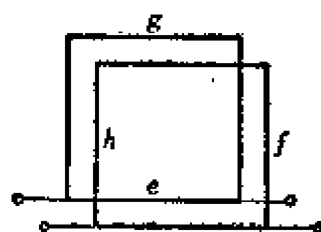


图 35.8

（ii） 在图35.7那样的Brune网絡的負电感側联接一个鏈联元件，如果

$$
\left.\begin{aligned}
&b=c+d \text{ (全耦合条件)},\\
&a\leqslant b,
\end{aligned}\right\} \tag{35.8}
$$

則它能变換成如图35.8所示的由四个元件联成的环狀网絡（它叫作单位环路）。它們的变換公式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
e&=\frac{abc(1+\omega_0^2)}{p}, \quad f=\frac{cd(b-a)}{p},\\
g&=\frac{bd(b+a\omega_0^2)}{\omega_0^2 p}, \quad h=\frac{ad(b+a\omega_0^2)}{p},
\end{aligned}\right\} \tag{35.9}
$$

其中 $$p=b^2+\omega_0^2(ad+bc).$$

这对于虛軸上的衰減极点是这样，对于实軸上的衰減极点，只要在上式中令

$$b\to -b,\quad d\to -d,\quad \omega_0^2\to -\sigma_0^2,$$

且有条件

$$\sigma_0^2\geqslant 1,$$

則仍然变換成正元件的单位环路。

利用这种变換，就証明了下列重要的定理。

定理 为要导納 $Y(\lambda)$ 能实現成除单位环路外沒有其他閉回路的电抗四端网絡終接一个电阻的形式，其必要和充分条件是 $Y(\lambda)+Y(-\lambda)$ 的零点只在实軸的 $|\lambda|\geqslant 1$ 内或在原点除外的虛軸上。

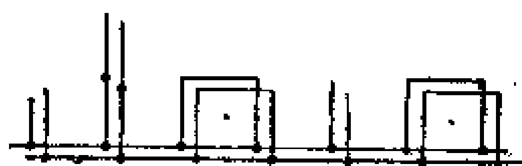


图 35.9

除单位环路外沒有其他閉回路的电抗四端网絡的形式如图 35.9 所示，它相当于集中参数情况下的梯子型。

这个定理的必要性是很容易明白的，这里只說明它的充分性。

$Y(\lambda)$ 在虛軸上有极点时，可把它作为并联电抗分离出来。这个操作并不改变 $2G(\lambda)\equiv Y(\lambda)+Y(-\lambda)$。

$G(\lambda)$ 在实軸上有零点时，可以分出图 35.7 那样的 Brune 网絡和鏈联的元件（順序上无論哪个在先都可以）。这就能用上述的变換实現成单位环路，剩下部分的 $G(\lambda)$ 的零点，除分出部分的零点以外，是和原来的相同。

若設虛軸上的零点为 $j\omega_1, j\omega_2, \cdots$，由于$Y(j\omega_\nu)$是純虛数，故

$$Y(1)-j\omega_\nu Y(j\omega_\nu) \tag{35.10}$$

是实数。这个值假定为負，且設零点为 $j\omega_1$。由 $Y(\lambda)$ 取出鏈联元件 $Y(1)$，接着取出对于 $j\omega_1$ 的 Brune 网絡。这部分就是图 35.7 的网絡，由于 a 等于 $Y(1)$，且

$$a-b=\frac{Y(1)^2(1+\omega_1^2)}{Y(1)-j\omega_1 Y(j\omega_1)}<0,$$

所以仍能用单位环路实現出来。实际計算时，先取出 Brune 网絡，

也沒有区别。对于某个 $j\omega_\nu$，当 (35.10) 的値为正时，首先取出鎖联元件 $Y(1)$，剩下的設为 $Y_1(\lambda)$，

$$j\omega_\nu Y_1(j\omega_\nu)-j\omega_\nu Y(j\omega_\nu)=\frac{\omega_\nu^2\{Y(1)^2-Y(j\omega_\nu)^2\}}{Y(1)-j\omega_\nu Y(j\omega_\nu)}>0.$$

亦就是 $j\omega_\nu Y(j\omega_\nu)$ 的值增大时，由于 $Y(1)$ 不收斂于零（参考下面），所以上式右边也不收斂于零。又 $Y(1)$ 不能为无穷大，所以經过有限多回，(35.10) 必能成为負值。从而又能用以上的方法除去 $G(\lambda)$ 的零点。在 $\omega_\nu=\infty$ 的特别情况下，則和图 35.6 一样，能够很簡单地除去，当 (35.10) 为零时，由于 Brune 网絡內沒有理想变压器，就可以不用单位环路来实现。最后，若 $G(\lambda)$ 变成实常数，这能用电阻和电抗的并联实現出来，于是綜合宣告結束。

〔$Y(1)$ 不趋于零或 ∞ 的証明〕　取出 n 回鎖联元件时的导納設为 $Y_n(\lambda)$，現在假定 $Y_n(1)\to 0$，則存在 n_0 和 a，使得

$$Y_n(1)<a<Y(0)=Y_n(0)\quad (n>n_0).$$

从而存在 σ，使

$$Y_{n_0}(\sigma)=a\quad (0<\sigma<1).$$

但由于

$$Y_{n_0+1}(\sigma)-Y_{n_0}(\sigma)=\frac{Y_{n_0}(\sigma)^2-Y_{n_0}(1)^2}{Y_{n_0}(1)/\sigma-Y_{n_0}(\sigma)}>0,$$

重复这样做，一般有

$$Y_n(\sigma)>Y_{n_0}(\sigma)\quad (n>n_0).$$

另一方面，从正实函数的性质，

$$\frac{Y(1)}{\lambda}\geqslant Y(\lambda)\quad (0<\lambda\leqslant 1).$$

因此

$$Y_n(1)\geqslant \sigma Y_n(\sigma)\geqslant \sigma Y_{n_0}(\sigma)\quad (n>n_0).$$

但这和 $Y_n(1)\to 0$ 是矛盾的。同样能够証明 $Y_n(1)$ 不能趋于 ∞。

这样就証明了这个定理。由于滤波器的特性可只由它的輸入导納决定出来，所以沒有相位特性問題的、衰减极点只在实軸上 $|\lambda|\geqslant 1$ 范圍或除原点外虛軸上的滤波器，总可以利用除单位环路

外沒有其他閉回路的电抗四端网絡构出。又在原点也有一阶衰减极点时，則用并联的电感就能实現。

如此得出的四端网絡的傳輸系数是

$$S_b(\lambda)=\frac{g(\lambda)}{(\sqrt{1-\lambda^2})^l f(\lambda)}, \qquad (35.11)$$

其中 $g(\lambda)$ 是 Hurwitz 多項式，$f(\lambda)$ 是偶或奇的多項式。l 等于由輸入至輸出之間最短途徑的鏈联元件数。

$$S_b(\lambda)S_b(-\lambda)=\frac{g(\lambda)g(-\lambda)}{(1-\lambda^2)^l f(\lambda)f(-\lambda)}, \qquad (35.12)$$

当 $g(\lambda)$ 內有 $(1+\lambda)^l$ 因子时，分子和分母可以簡約，这和集中参数的情况有相同的形式。因此，可以完全同样地进行逼近。此时可写出

$$S_b(\lambda)=\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{l/2}S_{b1}(\lambda)=e^{j\frac{\pi f}{2f_0}l}\cdot S_{b1}(\lambda), \qquad (35.13)$$

这个 $S_{b1}(\lambda)$ 就是集中参数場合的傳輸系数，$\exp(j\pi fl/2f_0)$ 簡单地只是一个延迟。亦即在这种情况，只是为了延迟，多了 l 个元件。

其次，$f(\lambda)=1$ 时网絡成为图 35.4 的形式，特別是，当 $g(\lambda)$ 的次数等于 l 时，变成只有鏈联元件的网絡。这时的特性正好等于逼近論內所述的 Fourier 級数的特性。

一般情况下特性的逼近方法，有各种各样的考虑，这里就省略了。

§36 非互易网絡

在由电阻、电感、电容、理想变压器組成的网絡內，互易定理总是成立的，可是互易性和綫性无源是独立的，綫性无源的网絡也可能是非互易的。这在有回轉的力学系統中早已知道，在电系統中証明存在，还是近二十年內的事。下面将从一般的观点討論它的原理。

通常在物理量之中，电压V和电荷Q，电流I和磁通Φ等两者之积表示能量。现在假設有一个量作微小变化，此时一个系統供給的能量可表成一个量乘另一量的增量VdQ，$Id\Phi$等形式。由此就把V和I的量及Q和Φ的量分成两类。现在考虑一个系統是用x_1，y_1和x_2，y_2两对量来規定，能量的增量为

$$dU=y_1dx_1+y_2dx_2, \tag{36.1}$$

再設下列关系成立：

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2. \end{aligned}\right\} \tag{36.2}$$

由于

$$a_{12}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_2\partial x_1}=a_{21},$$

所以以上的关系看成是互易的。可是若把它写成

$$\left.\begin{aligned} y_1&=b_{11}x_1+b_{12}y_2, \\ x_2&=b_{21}x_1+b_{22}y_2, \end{aligned}\right\} \tag{36.3}$$

则由于$b_{12}=a_{12}/a_{22}=-b_{21}$，所以这个关系不是互易的。在非互易之中，我們特别把$b_{12}=-b_{21}$的情况叫作反互易的。由上述可知，互易或反互易是由变量的取法而来，不是系統本身的性质。在电网絡的場合，輸入和輸出都由电压和电流規定出来，但对于一对端子是靜电的，另一对端子是电磁的系統，亦就是說

$$dU=V_1dQ_1+I_2d\Phi_2, \tag{36.4}$$

$I_1=dQ_1/dt$，$V_2=d\Phi_2/dt$，由于V_1和I_2，I_1和V_2各为相同系統的量，于是写成

$$\left.\begin{aligned} V_1&=Z_{11}I_1+Z_{12}I_2, \\ V_2&=Z_{21}I_1+Z_{22}I_2 \end{aligned}\right\} \tag{36.5}$$

时，就有$Z_{12}=-Z_{21}$，这成为反互易的网絡。实际上，实現(36.4)的东西就是把靜电型的电机械变换器(例如电容式微音器)和电磁型的电机械变换器(例如活动綫圈听筒)在机械端子处鏈联后所成

的系統。

此外，作为非互易网絡元件的，亦有考慮利用 Hall 效应做成的器件。在图 36.1 內，鍺半导体立方体的两对面上各联以电极，今在一对面上加入垂直的磁場，那末这两对端子間的特性就是非互易的。

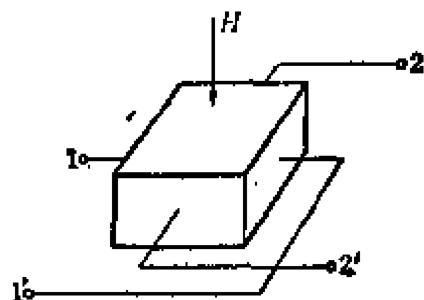


图 36.1

虽然知道在无源元件中亦存在非互易的无源元件，但在非互易网絡理論中，正如把耦合綫圈理想化后定义出理想变压器一样，把非互易的性质理想化，考慮**理想回轉器**是方便的。它定义为具有下列阻抗矩陣的东西：

$$Z=\begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix} \quad (\zeta \text{ 为实数}), \tag{36.6}$$

它的記号如图 36.2 所示。

由 (36.6) 可求出鏈联矩陣为

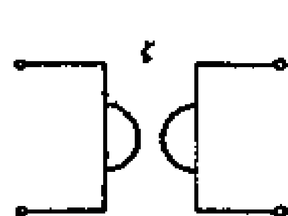


图 36.2

$$K=\begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ 1/\zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad |K|=-1. \tag{36.7}$$

把它和理想变压器的鏈联矩陣

$$K=\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}, \quad |K|=1 \tag{36.8}$$

对比一下，是很有趣的。

非互易网絡的一般理論将在第二篇內叙述，这里簡单地提一下几个有趣的网絡。

(i) 阻抗反轉网絡　理想回轉器把电流变換成电压，电压变換成电流，所以輸出端联接一个阻抗 Z 时，輸入阻抗就变成 ζ^2/Z。

(ii) 单向通过系統　在图 36.4 中，ζ 和电阻串联，它的阻抗矩陣变成

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 2\zeta & \zeta \end{pmatrix}, \tag{36.9}$$

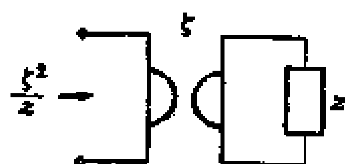


图　36.3

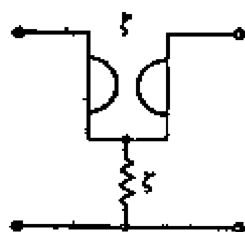


图　36.4

由于 $Z_{12}=0$, $Z_{21}\neq 0$，所以只能自左向右傳輸信号，反方向不能傳輸。

(iii) 环行器 (circulator)　若按图 36.5 联接，則在各終端阻抗为 ζ 时，得出只能由 11′ 至 22′、由 22′ 至 33′、由 33′ 至 11′ 傳輸的网絡。因此称它为环行器。

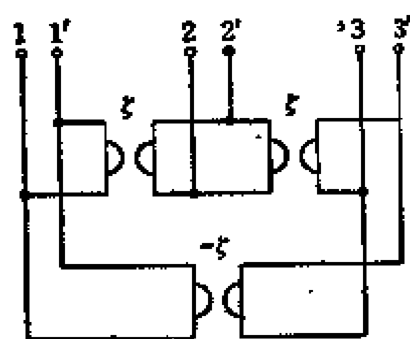


图　36.5

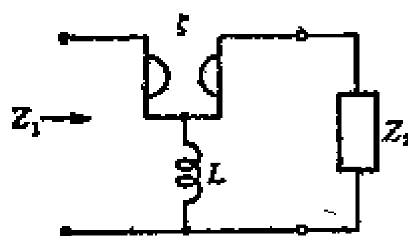


图　36.6

(iv) 在二端网絡綜合理論上的应用　作出图 36.6 那样的网絡，則

$$Z_1=\frac{\lambda L Z_2+\zeta^2}{\lambda L+Z_2}, \tag{36.10}$$

它正好和 §13 (b) 所述的 Z_5 和 Z_6 的关系相同，所以仍旧得出 Brune 的第 4 步。当 $L_1<0$ 时，L 可代成 C。

第二篇　多端网絡理論[1]

第8章　基 础 理 論

§37 緒　論

在上一篇中，讲述了二端网絡和四端网絡的許多有趣的性质，这一篇将进一步研究 $2n$ 端网絡。这不仅因为对 $2n$ 端网絡有兴趣，同时，亦为了在了解 $2n$ 端网絡以后，才能充分理解二端网絡和四端网絡。不仅如此，在二端网絡和四端网絡問題中，还有綜合网絡所需的元件数目問題和等效网絡等問題，这些問題，如果不从 $2n$ 端网絡的观点来討論，将得不到解决。多端网絡理論也有很多分門，下面主要讲述应用数学特性最强的綜合理論（或构成理論），即考虑如何实現具有給定頻率特性的多端网絡問題。所处理的是时間上不变的、綫性、无源、集中参数元件的网絡。

$2n$ 端网絡是如图 37.1(*a*)所示的有 n 对外部端子的网絡，亦就是在 n 端对网絡 (*n*-terminal pair network, *n*-port)上，只在这些端对上加入外部的电动势。因此，并不是指仅由端子构成 $2n$ 个回路。例如，对于外部端子为 3 或 4 的网絡，如果全部考虑它們的端子組合，則各可成为 6 端或 12 端网絡。在各端对的电压和电流，具有如下的关系：

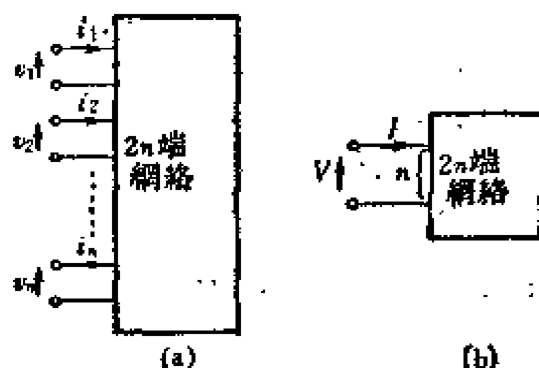


图　37.1

$$V = ZI,\tag{37.1}$$

[1] 第二篇由大野执笔。

其中

$$V=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix} z_{11}\cdots z_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ z_{n1}\cdots z_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (37.2)$$

根据(37.1)式，在以后，图37.1(a)将屡次地画成图(b)那样。这些式子中，通常用小写字母代表标量，大写字母代表矩陣。解出(37.1)内的I，則得

$$I=YV, \qquad (37.3)$$

其中$Y=Z^{-1}$，Z和Y各为$2n$端网絡的阻抗矩陣和导納矩陣。但在四端网絡場合中已經看到，还存在不能定义Z和Y的$2n$端网絡。两个以上$2n$端网絡的串联或并联，也得出Z或Y的和，具体联接时，一般还需要理想变压器，这和四端网絡的情况是相同的。对于不含回轉器等非互易元件的互易网絡，即由电阻(R)、电容器(C)、綫圈(L)和理想变压器(变压器M可看成L与理想变压器的組合)組成的通常网絡，Z和Y是对称矩陣。下面若无特殊声明，网絡都設为互易的。

描述多端网絡特性的矩陣中，除Z矩陣和Y矩陣外，S矩陣也是重要的。考慮到一般对它不很熟悉，所以我們将要比較詳細地加以叙述。如果在图37.1的各端对上，联接一段波动阻抗为1的无限短的綫路，則$2n$端网絡各端子对上的入射电压波和电流波各为$\frac{1}{2}(v_1+i_1)$，…，$\frac{1}{2}(v_1+i_n)$。反射波为$\frac{1}{2}(v_1-i_1)$，…，$\frac{1}{2}(v_n-i_n)$。

这是因为可以假定有一段波动阻抗为z_0，傳輸常数为γ的綫路，我們知道，若輸入端的电压和电流各为v_1和i_1，則与輸入端相距x处的电压等于

$$v_1\cosh\gamma x-i_1z_0^{-1}\sinh\gamma x$$
$$=\frac{1}{2}(v_1+i_1z_0^{-1})e^{-\gamma x}+\frac{1}{2}(v_1-i_1z_0^{-1})e^{\gamma x}.$$

右边第一項表示远离輸入端的波，第二項表示接近輸入端的波。若令 $z_0=1$ 和 $x\to 0$，則入射电压波和反射电压波各为 $\frac{1}{2}(v_1+i_1)$ 和 $\frac{1}{2}(v_1-i_1)$，同样，对于电流，也有类似的关系。

这里利用入射波和反射波的关系定义一个矩陣 S：

$$S(V+I)=V-I, \tag{37.4}$$

S 矩陣(scattering matrix)也叫**特性矩陣**。具体的 S 例如可用下法計算。在图 37.2 內，在各端对上联接 n 个单位內阻的电源

$$E'=(e_1, \cdots, e_n) \tag{37.5}$$

(撇号表示轉置矩陣)。考慮到內阻引起的电压降，所以

$$\left.\begin{aligned} E&=V+I,\\ I&=\eta E, \end{aligned}\right\} \tag{37.6}$$

其中 η 是把电源內阻附加在 $2n$ 端网絡上所得的 $2n$ 端网絡(見图)

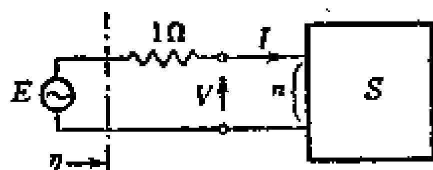


图 37.2

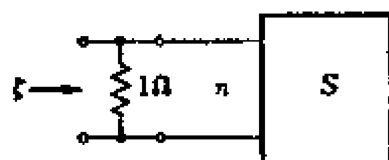


图 37.3

的导納矩陣。所以 η 的各个元素不会变成无穷大，就是說，η 总是存在的。由(37.4)和(37.6)直接得出

$$S=1_n-2\eta, \tag{37.7}$$

其中 1_n 是 n 阶的单位矩陣。因此，S 矩陣經常存在，即使对于不存在 Z 矩陣或 Y 矩陣的 $2n$ 端网絡，也可把它定义出来。同样，令图 37.3 网絡的阻抗矩陣为 ζ，則

$$S=2\zeta-1_n. \tag{37.8}$$

当 $2n$ 端网絡具有 Z 矩陣或 Y 矩陣时，下列一些关系可以帮助研究 S 矩陣的性质：

$$\left.\begin{aligned} S&=1_n-2(Z+1_n)^{-1}=(Z-1_n)(Z+1_n)^{-1},\\ S&=2(1_n+Y)^{-1}-1_n=(1_n-Y)(1_n+Y)^{-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (37.9)$$

$$\left.\begin{aligned} Z&=\eta^{-1}-1_n=(1_n+S)(1_n-S)^{-1},\\ Y&=\zeta^{-1}-1_n=(1_n-S)(1_n+S)^{-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (37.10)$$

在 $2n$ 端网絡内，消耗的功率不能为負，且由于

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(V'^*I)&=\frac{1}{4}(V'^*+I'^*)(V+I)-\frac{1}{4}(V'^*-I'^*)(V-I)\\ &=\frac{1}{4}(V'^*+I'^*)(1_n-S'^*S)(V+I)\\ &=\frac{1}{4}E'^*(1_n-S^*S)E, \end{aligned} \qquad (37.11)$$

其中 $*$ 表示复共轭，Re 表示实部，所以若任意假定电源电压 E，則 1_n-S^*S 是一个非負值的 Hermite 矩陣。

具有 $H'^*=H$ 性质的矩陣 H 叫做 Hermite 矩陣。当

$$X'=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

时，X'^*HX 叫作 Hermite 形式，如果不管 X 如何，它是非負的，則 H 称为非負值的 Hermite 矩陣。H 的元素为实数时，簡単地也可称为非負值矩陣。关于非負值矩陣的性质，可参考 §40 有关正实矩陣的一些定理。

其次注意 S 左上角的 k 阶子矩陣，就是把第 $k+1,\ \cdots,\ n$ 端对都終接单位电阻后所得的 $2k$ 端网絡的 S 矩陣。这在(37.4)内令

$$v_{k+1}+i_{k+1}=0,\ \cdots,\ v_n+i_n=0,$$

再从 S 矩陣的定义就可明白。由此可知，S 矩陣在电阻終端网絡的研究上特别适用。

以上虽然考虑了波动阻抗为 1 的无限短的綫路，但若把按照(37.4)定义的 S 矩陣作为正規化的 S 矩陣，則各端对上是波动阻抗 $z_{01},\ \cdots,\ z_{0n}$ 的綫路之 S 矩陣也可定义出来。这在图 37.4 那样的終端阻抗各为 $z_{01},\ \cdots,\ z_{0n}$ 的情况下是有用的。但此时要考虑假想的理想变压器，把它改换成图 37.5。对于虚綫 A 的右边部分，

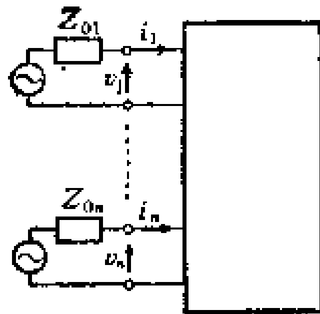


图　37.4

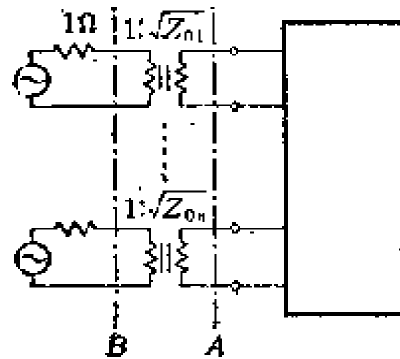


图　37.5

我們能用(37.4)的定义求出 S 矩陣，再按(37.10)变換成 Z 矩陣。設它为 Z_A，則虛綫 B 的右边部分即最初考虑的部分的阻抗矩陣 Z 为

$$Z=N'Z_AN, \tag{37.12}$$

其中

$$N=\mathrm{diag}(\sqrt{z_{01}},\ \cdots,\ \sqrt{z_{0n}}), \tag{37.13}$$

N 是一个对角綫元素从左上角起順次为 $\sqrt{z_{01}}$, …, $\sqrt{z_{0n}}$ 的对角形矩陣。

今举一个例子，設在图 37.5 內 $n=2$, z_{01} 和 z_{02} 是四端网絡的影象阻抗。在虛綫 A 处求 S 矩陣：

$$S=\begin{pmatrix}0 & s\\ s & 0\end{pmatrix},\quad s=e^{-\theta},$$

其中 θ 是影象傳輸常数。根据(37.10)求 Z_A:

$$Z_A=\frac{1}{1-s^2}\begin{pmatrix}1+s^2 & 2s\\ 2s & 1+s^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\coth\theta & 1/\sinh\theta\\ 1/\sinh\theta & \coth\theta\end{pmatrix}.$$

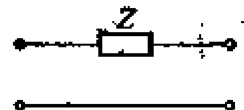


图　37.6

再利用(37.12)，就直接得出众所周知的关系

$$Z=\begin{pmatrix}z_{01}\coth\theta & \sqrt{z_{01}z_{02}}/\sinh\theta\\ \sqrt{z_{01}z_{02}}/\sinh\theta & z_{02}\coth\theta\end{pmatrix}.$$

又在图 37.5 中虛綫 A 处求 S 矩陣时，如果有那个 z_{01}, …, z_{0n} 是电抗，則 S 的元素会变成无穷大。但对于实际的問題，这种情况沒有考虑的必要。

問題 1　虽然图 37.6 的四端网絡沒有 Z 矩陣，但 S 矩陣为

$$S=\frac{1}{z+2}\begin{pmatrix} z & 2 \\ 2 & z \end{pmatrix}.$$

問題 2 在(37.4)內，設 $e_2=\cdots=e_n=0$，即电源只加在端对1上，端对2以下簡单地只是电阻終端，則 S 矩陣的元素为

$$s_{11}^2=\left(\frac{1}{4}e_1^2-v_1i_1\right)\Big/\left(\frac{1}{4}e_1^2\right),$$

$$s_{12}^2=-v_2i_2\Big/\left(\frac{1}{4}e_1^2\right),\ \cdots,\ s_{1n}^2=-v_ni_n\Big/\left(\frac{1}{4}e_1^2\right).$$

問題 3 在上一題內，$n=2$，卽对于四端网絡而言，

工作傳輸系数 $S_b=1/s_{12}$，

反射傳輸系数 $T_c=1/s_{11}$，

电压傳輸系数 $M_i=(1-s_{11})/s_{12}$，

电流傳輸系数 $N_v=(1+s_{11})/s_{12}$.

(在(37.4)內設 $v_2+i_2=0$，就可利用各个傳輸系数的定义。关于这些定义，請参考第一篇。但在本篇內为了和其他記号区别起見，采用了 T_c，M_i 和 N_v.)

§38 理想变压器网絡和綫性变換

若把理想变压器网絡和一个具有阻抗矩陣 Z 的 $2n$ 端网絡相联接，則得到一个阻抗矩陣为 $Z^{(1)}=N'ZN$ 的 $2n$ 端网絡，这就是对阻抗矩陣施行了綫性变換(Cauer, 1932)。其中 N 是元素为实常数的 n 阶滿秩矩陣。我們首先考虑一些簡单的情况。在图 38.1 內，由于

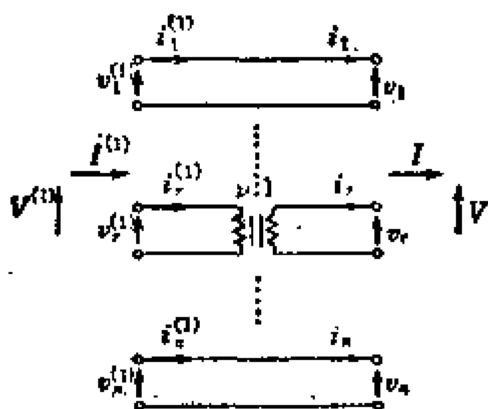


图 38.1

$$\left.\begin{aligned} v_r&=\nu^{-1}v_r^{(1)}, \\ i_r&=\nu i_r^{(1)}, \end{aligned}\right\} \quad (38.1)$$

于是

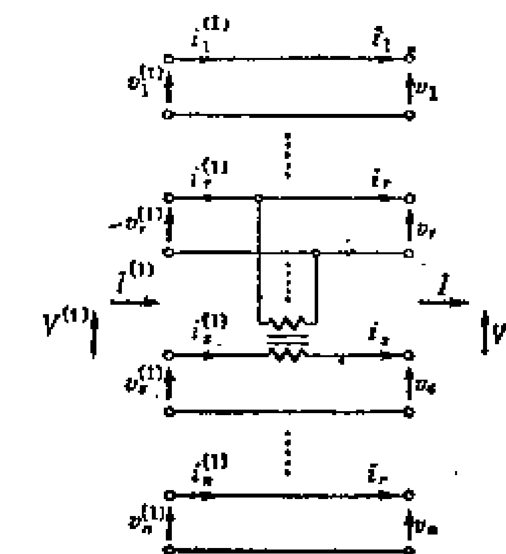
$$\left.\begin{aligned} V&=N_{rr}^{-1}(\nu)V^{(1)}, \\ I&=N_{rr}(\nu)I^{(1)}, \end{aligned}\right\} \quad (38.2)$$

其中 $N_{rr}(\nu)$ 为第(r,r)元素是 ν，其他元素全部为1的对角矩陣。其次在图 38.2 內，

$$v_r = v_r^{(1)},\ v_s = -\nu v_r^{(1)} + v_s^{(1)},$$
$$i_r = i_r^{(1)} + \nu i_s^{(1)},\ i_s = i_s^{(1)}. \tag{38.3}$$

即

$$V = N_{rs}'^{-1}(\nu) V^{(1)},$$
$$I = N_{rs}(\nu) I^{(1)}, \tag{38.4}$$


图 38.2

其中 $N_{rs}(\nu)$ 为对角綫上元素全是1，第 (r, s) 元素为 ν，其他元素全部是0的矩陣。因此，把 N 变形成对角矩陣的手續可以分段考虑并由矩陣論知道 N 一般可作如下的分解：

$$N = N_k N_{k-1} \cdots N_1, \tag{38.5}$$

其中 $N_1, \cdots, N_k$ 都是 $N_{rr}(\nu)$ 或 $N_{rs}(\nu)$ 形式的矩陣。于是

$$I = N I^{(1)} \tag{38.6}$$

的变換可按图 38.3 实現出来。对于电压，则

$$V = N_k'^{-1} \cdots N_1'^{-1} V^{(1)},$$

即

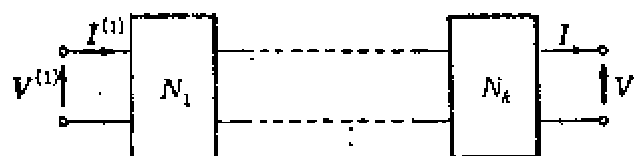
$$V = N'^{-1} V^{(1)}. \tag{38.7}$$

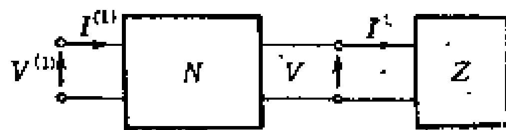
現在考虑图 38.4 的网絡。在此图中，由于 $ZI = V$，再参考 (38.6) 和 (38.7)，于是

$$N'ZNI^{(1)} = V^{(1)},$$

即

$$Z^{(1)} = N'ZN. \tag{38.8}$$


图 38.3


图 38.4

对于导納矩陣的綫性变换，也有同样的結果。Z 矩陣和 Y 矩陣具有所謂“对偶”(dual)的关系，所以下面的討論只对其中任一而言。在(38.5)的 N 的分解中，可以利用具有一对繞組的理想变压器的組合来实現綫性变换。实現 $N_{r1}(\nu_1)\cdots N_{rn}(\nu_n)$ 时需要 n 个理想变压器，于是知道，这可以归結于具有$(n+1)$个繞組的一个理想变压器。

問題1 实現 $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.(这意味着端子的簡单交换。但也能用(38.5)的形式实現出来。)

問題2 証明图38.3的理想变压器网絡的 S 矩陣是由下式給出的:

$$S_N=\begin{pmatrix}2N'^{-1}(N'^{-1}+N)^{-1}-1_n & 2(N'+N^{-1})^{-1}\\ 2(N'+N^{-1})^{-1} & 2N'(N'+N^{-1})^{-1}-1_n\end{pmatrix},$$

其中 S_N 为正交矩陣。(利用(37.7)或(37.8)式。)

§39 电阻多端网絡的綜合

現在来求阻抗矩陣为常数矩陣

$$R=\begin{pmatrix}r_{11}\cdots r_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ r_{n1}\cdots r_{nn}\end{pmatrix}\tag{39.1}$$

的 $2n$ 端网絡。为了使 R 是一个实在的 $2n$ 端网絡的阻抗矩陣，R 必須是非負値矩陣。这例如用下列的想法就可知道。假定 $2n$ 端网絡的端子电压和电流都是直流，各記为 V 和 I，則网絡内部消耗的功率

$$I'V=I'RI\geqslant 0,\tag{39.2}$$

卽 R 是非負値的。因此，若对 R 施行綫性变换:

$$N'RN=\mathrm{diag}(r_1,\ \cdots,\ r_n),\tag{39.3}$$

则

$$r_1, \cdots, r_n \geq 0. \tag{39.4}$$

由于 $r_1, \cdots, r_n$ 代表 n 个电阻(也包括零)，于是利用理想变压器，取

$$R = N'^{-1}\mathrm{diag}(r_1, \cdots, r_n)N^{-1} \tag{39.5}$$

就可把 R 实現出来。

以上的实現方法很簡单，但是如果限制所用的理想变压器(具有一对繞組的)的个数，則也相当困难。这些也是与实际要求有关的重要問題，然而至今沒有得出滿意的結果。这种問題是属于拓扑学的网絡理論領域。

只有綫圈或电容器的网絡的阻抗矩陣可取为 $j\omega L$ (j 是虛数单位，ω 是角頻率)或 $(j\omega)^{-1}D$，L 和 D 也是非負值的，可以和 R 的情况进行同样的处理。綜合 $j\omega L$ 时，理想变压器可用全耦合的或者不是全耦合的变压器所代替。

§ 40 正实矩陣

以上討論了簡单的 $2n$ 端网絡的綜合，至于一般的 $2n$ 端网絡的綜合，必須研究作为复数頻率 $\lambda = \alpha + j\omega$ 的函数的阻抗矩陣的性质。假定 $Z(\lambda)$ 是某个 $2n$ 端网絡的阻抗矩陣，由 § 38 的叙述知道，$Z^{(1)}(\lambda) = N'Z(\lambda)N$ 也是实在的 $2n$ 端网絡的阻抗矩陣。如果 N' 的第一行元素是 $x_1, \cdots, x_n$，

$$X' = (x_1, \cdots, x_n), \tag{40.1}$$

则得 $Z^{(1)}$ 的 $(1, 1)$ 元素为

$$z_{11}^{(1)}(\lambda) = X'Z(\lambda)X. \tag{40.2}$$

$z_{11}^{(1)}(\lambda)$ 是二端网絡的阻抗，所以是一个正实函数(第一篇)。某个对称矩陣

$$F(\lambda)=(f_{st}(\lambda))=\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda)\cdots f_{1n}(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(\lambda)\cdots f_{nn}(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (40.3)$$

的任意实系数二次形式 $X'F(\lambda)X$，不管 X 如何，总是正实函数(包括零)时，则称 $F(\lambda)$ 为正实矩陣(positive real matrix)。因此，阻抗矩陣是正实矩陣。非負值的矩陣是正实矩陣的特別情况。

正实函数(包括零)可用下列条件定义(第一篇)：

(i) λ 为实数时 $f(\lambda)$ 为实数。

(ii) 对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 的 λ，$f(\lambda)$ 是解析的。

(iii) 对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 的 λ，$\mathrm{Re}\,f(\lambda)\geqslant 0$。对于有理函数，(iii)换成

(iii′) $\mathrm{Re}\,f(j\omega)\geqslant 0$，$f(\lambda)$ 的虛軸极点是一阶的，它的留数为正。

参照正实函数的定义，下面比較詳細地写下了正实矩陣的条件。

定理 1　矩陣 $F(\lambda)$ 为正实矩陣的必要和充分条件是

(i) λ 为实数时 $F(\lambda)$ 为实数；

(ii) 对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 的 λ，$F(\lambda)$ 是解析的；

(iii) 对于 $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ 的 λ，$\mathrm{Re}\,F(\lambda)$ 是非負值的矩陣。

对于元素为有理函数的 $F(\lambda)$，(iii)可換成

(iii′) $\mathrm{Re}\,F(j\omega)$ 是非負值的矩陣，$F(\lambda)$ 的虛軸极点是一阶的，它的留数組成的矩陣是非負值矩陣。

上面說 $F(\lambda)$ 为实数，是指 $F(\lambda)$“的元素”都是实数。以后将屢次用这种讲法。条件(i)，(ii)，(iii)或(iii′)在(40.1)的 $x_1,\cdots,x_n$ 为特殊值时是很容易理解的。在(iii)内，$\mathrm{Re}\,F(\lambda)$代表$(\mathrm{Re}\,f_{st}(\lambda))$，它叫作 $F(\lambda)$ 的**实部矩陣**。下面将以定理的形式叙述正实矩陣的重要性质。

定理 2　正实矩陣之和为正实矩陣。

定理 3　若 F 是正实矩陣，則 $N'FN$ 也是正实矩陣。

这是因为 $N'FN$ 的实系数二次形式 $X'(N'FN)X=(NX)'F(NX)$ 是正实函数。

定理4 正实矩陣的主子矩陣为正实矩陣。特别是,对角綫元素都是正实函数。

例如在(40.1)內,設 $x_2=\cdots=x_n=0$,則由正实矩陣的定义,就可明白。

定理5 正实矩陣的某个对角綫元素如果恒等于零,则該行(列)所有的元素都恒等于零。

例如 $f_{11}\equiv 0$,如果 $f_{12}\not\equiv 0$,則总存在 x_1 和 x_2 的值,使二次形式

$$x_1^2f_{11}+2x_1x_2f_{12}+x_2^2f_{22}=2x_1x_2f_{12}+x_2^2f_{22}$$

不是正实函数。利用定理5,可以証明下列一个重要定理。

定理6 設 n 阶的正实矩陣 $F(\lambda)$ 的秩数为 $\rho(<n)$,则經过綫性变换,可变为一个滿秩的 ρ 阶主子矩陣,而使其他的元素全部恒等于零。

$F(\lambda)$ 的秩数是 ρ,所以它的所有的 $(\rho+1)$ 阶子行列式都恒等于零,ρ 阶子行列式至少有一个不恒等于零。在 $F(\lambda)$ 內,設不恒等于零的 ρ 阶子行列式位在最初的 ρ 行,这并不失去一般性。由于存在 λ 的正的实数值,使这个子行列式不为零,不妨令它为 λ_0。如果把 $F(\lambda_0)$ 的最初 ρ 行和 ρ 列加于其他行和列上进行适当的綫性变换 N,則可使 $N'F(\lambda_0)N$ 的最后的 $(n-\rho)$ 行和列的元素全部成为零。$N'F(\lambda)N$ 是正实矩陣,它的对角綫元素全部是正实函数,于是第 $(\rho+1)$ 个以下的对角綫元素在 $\lambda=\lambda_0$ 时可变成零,結果恒等于零。因此,由定理5,$N'F(\lambda)N$ 的第 $(\rho+1)$ 行和列以下的元素全部恒等于零。由于秩数为 ρ,$N'F(\lambda)N$ 的左上角 ρ 阶主子矩陣是滿秩的,这正是 $F(\lambda)$ 的左上角的 ρ 阶主子矩陣,所以就証明了这个定理。

由上面可知与满秩的 ρ 阶子矩陣具有相同行(列)的 ρ 阶主子矩陣是满秩的。反之,在一般情况下,如果有 r 阶主子矩陣不是满秩的,那末与它有相同行(列)的 r 阶子矩陣也都不是满秩的。

定理 7 若 $F(\lambda)$ 为满秩的正实矩陣,則 $F^{-1}(\lambda)$ 也是正实矩陣。

首先来証明 $F^{-1}(\lambda)$ 满足定理 1 的条件(i)和(ii)。为此,由于 $F(\lambda)$ 满足定理 1 的条件(i)和(ii),作逆矩陣时可以証明 $|F(\lambda)|$ 在右半平面內沒有零点。今假定 $\mathrm{Re}\,\lambda_1>0$, $|F(\lambda_1)|=0$, 于是存在一个 $(n, 1)$ 型的矩陣 Ξ, 使得

$$F(\lambda_1)\Xi=0. \tag{40.4}$$

Ξ 可分为实部和虛部:

$$\Xi=X+jY. \tag{40.5}$$

X 和 Y 是元素为实数的 $(n, 1)$ 型矩陣。作出 $\Xi'^*F\Xi$:

$$\begin{aligned}\Xi'^*F(\lambda)\Xi&=(X'-jY')F(\lambda)(X+jY)\\&=X'FX+Y'FY-j(Y'FX-X'FY)\\&=X'F(\lambda)X+Y'F(\lambda)Y.\end{aligned} \tag{40.6}$$

右边各項是正实函数。然而按照(40.4),

$$X'F(\lambda_1)X+Y'F(\lambda_1)Y=0,$$

由于在右半平面內具有零点的正实函数必須恒等于零,

$$X'F(\lambda)X\equiv0,\ Y'F(\lambda)Y\equiv0. \tag{40.7}$$

X 和 Y 有一个不为零矩陣,例如設 $X\neq0$, 則可作出一个满秩的实的正方矩陣。根据(40.7), $N'F(\lambda)N$ 的第(1, 1)元素恒等于零,于是由定理 5, $N'F(\lambda)N$ 的第一行和列全部的元素恒等于零。即

$$|F(\lambda)|\equiv0,$$

即 $F(\lambda)$ 不是满秩的。

結果是,如果 $F(\lambda)$ 为满秩的,那末 $|F(\lambda)|$ 在右半平面內不能有零点,所以 $F^{-1}(\lambda)$ 满足定理 1 的条件(i)和(ii)。其次,設有任

意的$(n, 1)$型矩陣 $\Xi(\neq 0)$，在右半平面內，

$$\mathrm{Re}\, \Xi'^{*} F^{-1}(\lambda)\Xi = \mathrm{Re}((F^{-1}\Xi)'^{*} F(F^{-1}\Xi)).$$

可是由于(40.6)式对于任意的 Ξ 都是正实函数，若以 $F^{-1}\Xi$ 代替 Ξ，則知上式右边不为負。因此，$F^{-1}(\lambda)$ 滿足定理1的条件(iii)。于是証明了以上的定理。

利用定理7，由 Kirchhoff 方程可以直接导出阻抗矩陣是正实矩陣，或者特別地，阻抗是正实函数。下面敍述一个大概。Kirchhoff 方程一般可写成

$$V = AI, \tag{40.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} V' &= (v_1, \cdots, v_n, \cdots, v_m), \\ I' &= (i_1, \cdots, i_n, \cdots, i_m), \\ A &= \lambda L + R + \lambda^{-1} D, \end{aligned}\right\} \tag{40.9}$$

m 为独立的回路数。R, L 和 D 是非負值的(見§39)，所以 A 是正实矩陣。如果把(40.8)写成

$$I = A^{-1}V, \tag{40.10}$$

則 A^{-1} 是正实矩陣。A^{-1} 的左上角的 n 阶主子矩陣即是 $2n$ 端网絡的导納矩陣，它的逆矩陣是阻抗矩陣，于是根据定理4和7，它們是正实矩陣。

定理8 如果以常数为元素的滿秩对称矩陣的实部矩陣是一个非負值矩陣，則逆矩陣的实部矩陣是秩数相同的非負值矩陣。

設 Z 是实部矩陣为非負值的对称矩陣，Z 可以看成为某个特定頻率下的阻抗矩陣。这是因为首先按§39的方法作出 Z 的实部矩陣，其次把虛部矩陣用綫性变換进行对角綫化，由于对角綫元素可用正負的电抗实現出来，所以同样能作出虛部矩陣。將两者串联，就实現了 Z。但利用(37.10)，可算出 $Z+Z^*$：

$$Z + Z^* = 2(1_n - S)^{-1}(1_n - SS^*)(1_n - S^*)^{-1}. \tag{40.11}$$

由于 $1_n - S$ 是滿秩的，$Z+Z^*$ 的秩数等于 $1_n - SS^*$ 的秩数。同样对于 $Y = Z^{-1}$，$Y+Y^*$ 的秩数也等于 $1_n - SS^*$ 的秩数。即証明了这个定理。

这个定理也容易直接証明。Z 的实部矩陣若为滿秩的，由于存在一个实的綫性变换，使实部矩陣和虚部矩陣同时对角綫化，所以知道定理是成立的。对于实部矩陣不是滿秩的情况，經过矩陣的适当变形，也可試加証明。

§41　电抗 $2n$ 端网絡的綜合

在电抗 $2n$ 端网絡內，根据 (40.2)，阻抗矩陣 Z 的二次形式 $X'ZX$ 必須滿足二端电抗的性质，所以 Z 的极点只位在虚軸上，按照定理 1 的条件(iii′)，Z 可以展成(Cauer, 1931)

$$Z=\lambda^{-1}H^{(0)}+\sum_{p=1}^{m}\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega_p^2}H^{(p)}+\lambda H^{(\infty)}. \tag{41.1}$$

由于这里的 $H^{(p)}$ 是非負值的矩陣，且 $\lambda/(\lambda^2+\omega_p^2)$ 表示 L 和 C 的幷联回路，所以(41.1)的各项可以用§39的方法綜合出来。(41.1)式对应于二端电抗的部分分式展开，和二端网絡的情况一样，同样能进行連分式展开或对于导納的展开。进一步亦解决了求与 Z 对应的所有的电抗 $2n$ 端网絡的問題(Cauer, 1934)。再設 $H^{(p)}$ 的秩数为 b_p，把理想变压器另作考虑，则 Z 可用

$$\sigma=b_0+2\sum_{p=1}^{m}b_p+b_\infty \tag{41.2}$$

个元件(L 或 C)綜合出来，幷且知道 σ 是最少的元件数目(Cauer)。和二端网絡一样，以上的討論也能直接推广到由两类元件組成的 $2n$ 端网絡。

§42　$2n$ 端网絡綜合的概要

$2n$ 端网絡綜合的基础是二端网絡綜合。具有損耗的一般二端网絡的綜合方法很多，有最早且基本的 Brune 方法(1931) (所用的 L 和 C 的个数最少，然而如果以整个元件来合計，一般还是用了多余的元件)，与濾波器有关的 Darlington, Piloty, Cauer, Cocci 的方法(1939～1940) (只用一个 R，即 R 是最少的)，以及不

用互感的 Bott 及 Duffin 的方法(1949)(見第一篇)。前两者发展成为 2n 端网絡的綜合。这是因为如果限制不用互感或理想变压器，則一般将不可能合成 2n 端网絡，数学的运算也非常不方便。其中关于四端网絡，由于实际需要，研究种种附加条件下的綜合方法，最近是很盛行的。最初考虑 2n 端网絡的綜合，是引用 Darlington 的方法系統。即以电阻終端的电抗多端网絡形式来实現 2n 端网絡，此时使用的电阻数目为最少(大野，1946; Bayard, 1949)。这个方法由于 S 矩陣的导入而发展了起来，并且亦能在組織上处理所有的等效网絡。S 矩陣的方法是一般的，它在应用数学上意义深长，所以将另在下章中介紹。

这里只是簡单地讲述推广 Brune 方法的 2n 端网絡綜合法(大野，1947; McMillan, 1948)。这种方法給出 L 和 C 的数目最少的网絡。假定給有一个阻抗 Z，虛軸上的极点根据定理 1 可以用 § 41 的方法綜合出来，所以預先把它們悉行除去。如果对于所有的 ω，都有 $|\mathrm{Re}\, Z(j\omega)|\neq 0$，則能作出一个非負值矩陣 R，使 $Z_0=Z-R$ 仍为正实矩陣，且在 $\omega=\omega_0$ 时，$|\mathrm{Re}\, Z_0(j\omega_0)|=0$。其次，取一个实常数的矩陣 ζ_1，使 $|Z_0-\lambda\zeta_1|$ 在 $\lambda=j\omega_0$ 时等于零。于是 $(Z_0-\lambda\zeta_1)^{-1}$ 在 $\lambda=j\omega_0$ 处有一个极点，把它作为 $\lambda(\lambda^2+\omega_0^2)^{-1}\zeta_2^{-1}$ 分出。这样若写成

$$Z(\lambda)=R+\lambda\zeta_1+\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega_0^2}\zeta_2^{-1}+(\lambda\zeta_3+Z_1(\lambda))^{-1}\right]^{-1}, \quad (42.1)$$

就和二端网絡的情况有相同的形式：

$$z(\lambda)=r+\lambda L_1+\left[\frac{\lambda}{\lambda^2+\omega_0^2}\frac{1}{L_2}+(\lambda L_3+z_1(\lambda))^{-1}\right]^{-1}. \quad (42.2)$$

又

$$L_1^{-1}+L_2^{-1}+L_3^{-1}=0 \quad (42.3)$$

的关系現在成为

$$\zeta_1^{-1}+\zeta_2^{-1}+\zeta_3^{-1}=0. \quad (42.4)$$

$\lambda\zeta_1$, $\lambda(\lambda^2+\omega_0^2)^{-1}\zeta_2^{-1}$ 和 $\lambda\zeta_3$ 一起組成一个可实现的网絡，可以証明 Z_1 是比 Z 簡单的正实矩陣。这种在形式上和二端网絡情况完全相同的綜合法是可能的，并且也得出电抗元件数目最少的网絡，然而在实际上，尚有許多麻煩的問題。例如，ζ_1 等一般沒有逆矩陣。又 ζ_1 一般不是定符号的矩陣，所以沒有相应于 $L_1>0$ 或 $L_1<0$ 的性質。Z_1 比 Z 簡单也有問題，由于在 $|Z|$ 为常数时 $|Z_1|$ 是有理函数，矩陣的复杂必須特殊考慮。关于这些問題，这里都省略了，只讲一种比較特殊的电阻数目用得最少的綜合方法。这是 Gewertz (1933) 的四端网絡理論的推广。

設給定的矩陣为 Z，其中虛軸上的极点已經除去。$\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$ 的秩数若为 ρ，則进行适当的綫性变换 N，可得

$$N'\,\mathrm{Re}\,Z(j\omega)N=\mathrm{diag}(d_1,\ \cdots,\ d_\rho,\ 0,\ \cdots,\ 0). \tag{42.5}$$

这里的 N 和 (39.2) 的不同，它的元素是 ω 的实系数有理函数。由于 d_t $(t=1,\ \cdots,\ \rho)$ 在虛軸上不能为負，故

$$\mathrm{Re}\,Z(j\omega)=\sum_{t=1}^{\rho}N'^{-1}D_tN^{-1}, \tag{42.6}$$

$$D_t=\mathrm{diag}(0,\ \cdots,\ 0,\ d_t,\ 0,\ \cdots,\ 0), \tag{42.7}$$

$N'^{-1}D_tN^{-1}$ 为对应于 ω 的任意实数值的秩数为 1 的非負值矩陣。而且它的对角綫元素对于 ω 的实数值沒有极点。这是因为对角綫元素不会变成負，如果有极点，則根据 (42.6)，$\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$ 的对角綫元素也要有极点。由于 $N'^{-1}D_tN^{-1}$ 是非負值的，所以对角綫元素以外的元素，对于 ω 的实数值，也不能有极点。按照上述，可以求出滿足

$$\mathrm{Re}\,Z_t=N'^{-1}D_tN^{-1} \tag{42.8}$$

且在虛軸上沒有极点的正实矩陣 Z_t，再按照 (42.6)，

$$Z=\sum_{t=1}^{\rho}Z_t. \tag{42.9}$$

因此，Z 的綜合归結于在虛軸上实部矩陣的秩数为 1 的正实矩陣

的綜合。首先假定 Z_t 是滿秩的。由于 Z_t 在虛軸上沒有极点，$Z_t(0)=\mathrm{Re}\,Z_t(0)$。再由于 $|Z_t(0)|=0$，即 $|Z_t^{-1}(0)|=\infty$，Z_t^{-1} 在 $\lambda=0$ 处有极点，同样，在 $\lambda=\infty$ 也有极点，于是能把这种极点从 Z_t^{-1} 分出。如果 Z_t 不是滿秩的，則根据定理 6，預先作出階数較低的矩陣，然后依同法进行。如此得出的矩陣当然是正实矩陣，然而它的实部矩陣的秩数在虛軸上是 1。所以上面的步驟可以反复进行。这种步驟只重复有限多回，这是要証明的，但如果进入不再重复的状态，则就到达正实函数。由于正实函数可以只用一个电阻的网絡表出，所以 Z_t 能用只含一个电阻的网絡实现出来。Z 是 Z_t $(t=1,\cdots,\rho)$ 的串联，于是終接 ρ 个电阻的 Z 就綜合成图 42.1 的形式。Z 在虛軸上有极点的情况显然也是一样，所以 Z 一般可表成 ρ 个电阻終接的电抗网絡的形式。这种电抗网絡以后可用 S 矩陣一般地求出，以上大体上是按 Darlington 关于二端网絡所得的結果进行一般化而推得。但在有 $\rho(\leqslant n)$ 个电阻的 $2n$ 端网絡內，对于(40.8)的 A 而言，$\mathrm{Re}\,A(j\omega)$ 的秩数为 ρ，所以若注意定理 8(§ 40)且根据关于(40.10)的討論，阻抗矩陣的实部矩陣的秩数在虛軸上至多等于 ρ。結果就有

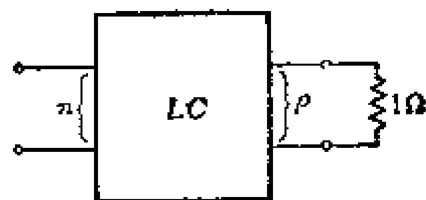


图　42.1

定理 9　綜合阻抗矩陣 Z 所必要的而且充分的电阻元件的数目等于 $\mathrm{Re}\,Z(j\omega)$ 的秩数。

以上为了綜合出网絡，把阻抗矩陣依次地化簡。这是对矩陣进行一种連分式展开，但沒有証明展开将以有限多回終止。为了把它一般化，定义出表示矩陣复杂程度的位数(degree)概念是方便的。設 $F(\lambda)$ 是元素为 λ 的有理函数的矩陣。$F(\lambda)$ (的元素)若在 $\lambda=\lambda_1$ 有极点，則 $F(\lambda)$ 的子行列式之中也在 $\lambda=\lambda_1$ 有极点。在这些极点的阶数內取最高的阶数，就叫作 $F(\lambda)$ 的极点 λ_1 的位数。又定义 $F(\lambda)$ 全部极点的阶数之和为 $F(\lambda)$ 的位数。矩陣簡单地就是有理函数的时候，位数和阶数是同一回事。关于位数的討論可以利用初等

因子的理論，把F的位数表成$\delta(F)$时，位数的一个重要性质是$\delta(F)=\delta(F^{-1})$。又若F_1和F_2沒有公共的极点，则很容易推得$\delta(F_1+F_2)=\delta(F_1)+\delta(F_2)$。利用这两个性质，就容易明白阻抗矩陣的展开是經过有限多回便終止的，这不需要特别說明。从(37.9)也能立即說出Z矩陣和S矩陣的位数是相等的。Z矩陣或S矩陣的位数給出了綜合网絡时必要和充分的L和C的数目。在§41内，(41.2)的σ显然就是Z的位数。

第9章　多端网絡和 S 矩陣

§43　有关 S 矩陣的基本定理

用任何方法綜合 $2n$ 端网絡时，可得出含有 l 个电阻的网絡。其中 $l\geqslant\rho$，ρ 是最少的电阻数目。把 l 个电阻分出来，网絡卽如图 43.1 所示。由于将这些电阻全考虑为单位电阻并不失去一般性，所以在給定 l 时如果有一般求电抗部分的方法，則就求出了所有的等效网絡。利用 S 矩陣这是可能的，但为了做这件事，首先要研究 S 矩陣的基本性质。

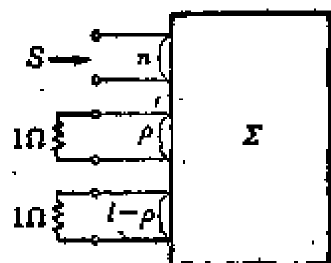


图　43.1

在(37.6)内，由图 37.2 知道，η 是正实矩陣。因此根据(37.7)，S 是对称矩陣，并且右半平面內沒有极点。又在(37.11)內，1_n-S^*S 是非負值的，利用記号

$$S_*=S(-\lambda),$$

在虛軸上 $S_*=S^*$，所以 1_n-S_*S 在虛軸上是非負值的 Hermite 矩陣。这就証明了下列的基本定理。

定理 10　S 为 $2n$ 端网絡的 S 矩陣之必要和充分条件是

(i)　S 是对称的，在 λ 的右半平面內沒有极点。

(ii)　1_n-S_*S 在虛軸上是非負值的 Hermite 矩陣。

或者(i)可換成

(i′)　S 的元素的分母是 Hurwitz 多項式。

条件(ii)已經包含 S 在虛軸上沒有极点。所以由(i)和(ii)，可以导出(i′)。(i′)和(ii)是重复的，但因为(i′)是重要的性质，所以在这里特别把它写出来。条件(i)和(ii)的必要性已經在上面讲

过了。現証它的充分性。按照条件(i′)，用(37.7)定出的 η，即

$$\eta=\frac{1}{2}(1_n-S) \tag{43.1}$$

在包含虚軸的 λ 的右半平面內沒有极点。但由于

$$\eta+\eta_*=\frac{1}{2}(1_n-S_*)(1_n-S)+\frac{1}{2}(1_n-S_*S), \tag{43.2}$$

$\eta+\eta_*$ 在虚軸上是非負值的。因此，η 是正实矩陣。如果 1_n-S 是滿秩的，則根据(43.1)，η^{-1} 存在，且也是正实的，于是

$$Z=\eta^{-1}-1_n \tag{43.3}$$

能滿足 §40 定理 1 条件(i)，(ii)和(iii′)之中关于虚軸上极点的条件。又根据(40.11)，$Z+Z_*$ 在虚軸上是非負值的，所以 Z 滿足条件(iii′)，即 Z 是正实矩陣。Z 有合成的可能，已在上一节內讲过了。其次假定 1_n-S 不是滿秩的。按照(41.1)，η 也不是滿秩的，所以設 η 的秩數为 $r<n$，参照 §40 定理 6，則可求出适当的滿秩常數矩陣 N，使 $N'\eta N$ 的最后$(n-r)$行和列的元素全部为零。再用 Schmidt 方法，使 N 的第 n 列和第$(n-1)$列依次地正交化，作出正交矩陣 T。

N 的第 n 列乘以适当的常數后加至第$(n-1)$列，这两者就成为正交。其次，第 n 列和第$(n-1)$列都乘以适当的常數后加至第$(n-2)$列，这也成为正交的。以下同样用此方法可使全部的列成为正交，最后在各列上乘以适当的常數，可得出規格化的 T，

$$TT'=1_n.$$

由元素为复數的滿秩矩陣同样能够作出酉矩陣。

$T'\eta T$ 的最后$(n-r)$行和列的元素显然都是零。若設 $T'\eta T$ 左上角 r 阶的子矩陣为 η_0，則按照(37.7)，得到❶

$$T'ST=1_n-T'\eta T=(1_r-2\eta_0)\dot{+}1_{n-r}=S_0\dot{+}1_{n-r}, \tag{43.4}$$

---

❶ “$\dot{+}$”表示矩陣的直接和。——譯者注

其中

$$S_0=1_r-2\eta_0, \tag{43.5}$$

1_r-S_0 是滿秩的。且因为 S_0 滿足条件(i)和(ii)，所以与 S_0 对应的 Z_0 是一个正实矩陣。Z_0 是可能合成的，1_{n-r} 代表$(n-r)$对的开路。又这里的 T 如下节所示，可以用理想变压器网絡实現出来。因此，条件(i)和(ii)是充分条件。上面証明了这个定理，在讲述用 S 矩陣的网絡綜合方法时还要給出这个定理的另一个証明。

电抗 $2n$ 端网絡內不消耗功率，所以根据(37.11)，在 λ 的整个平面上，

$$S_*S=1_n. \tag{43.6}$$

一般地說，滿足关系

$$U'_*U=1_n \tag{43.7}$$

的矩陣 U，卽在虛軸上是酉矩陣，被叫作**对酉矩陣**(para-unitary matrix)，由(43.6)可得

系 一个矩陣 Σ 将为一个电抗 $2n$ 端网絡的 S 矩陣的必要和充分条件是 Σ 在右半平面內沒有极点，且是一个对称的对酉矩陣。

現設給定的电抗 $2n$ 端网絡的阻抗矩陣如(41.1)式所示。令 φ 为 $|\eta^{-1}|=|1_n+Z|$ 的分子，分母为 $\lambda^{b_0}(\lambda^2+\omega_1^2)^{b_1}\cdots(\lambda^2+\omega_m^2)^{b_m}$，于是 φ 的次数按照 $\lambda=\infty$ 来考慮，就是(41.2)的 σ。又因为 η 如前所述是在虛軸上沒有极点的正实矩陣，所以 φ 是 σ 次的 Hurwitz 多项式。若注意 $Z_*=-Z$，且根据(37.9)，

$$\Sigma=(-Z_*-1_n)(Z+1_n)^{-1}=-\eta_*^{-1}\eta,$$

故
$$|\Sigma|=\pm\varphi_*/\varphi,$$

$|\Sigma|$ 的次数卽是 σ。对于 Z 不存在的場合，参照(43.4)，也能得出下列定理。

定理 11 綜合 Σ 时必要和充分的 L 和 C 的数目等于 $|\Sigma|$ 的次数。

§44 濾波器与 S 矩陣

在第一篇內已經討論了濾波器的工作特性理論，这也能用 S 矩陣的理論来讲述。若設电抗四端网絡的 S 矩陣为

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}, \tag{44.1}$$

由于按§37的問題3很容易得出 $S_b=1/\sigma_{12}$ 等关系，所以濾波器的工作特性从 S 矩陣来看最易理解。若 g_0 为 Σ 各个元素的最小公分母，則可写出

$$\Sigma=\frac{1}{g_0}\begin{pmatrix}k_{11} & k_{21}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}. \tag{44.2}$$

根据上一节定理10的条件(i′)，g_0 是 Hurwitz 多項式，則 Σ 是对酉矩陣的条件为

$$k_{11*}k_{11}+k_{21*}k_{21}=g_{0*}g_0, \tag{44.3}$$

$$k_{11*}k_{21}+k_{21*}k_{22}=0. \tag{44.4}$$

一般不討論 $k_{21}=0$ 的情况，所以設 $k_{21}\neq0$，則由(44.4)，

$$k_{22}=-k_{11*}k_{21}/k_{21*}. \tag{44.5}$$

如果 k_{21} 是偶或奇多項式，則

$$k_{22}=\mp k_{11*}. \tag{44.6}$$

再在 σ_{21} 的分母和分子上乘以适当的多項式 ψ，設

$$\sigma_{21}=f/g,\quad f=k_{21}\psi,\quad g=g_0\psi, \tag{44.7}$$

使 f 为偶或奇多項式，則

$$\Sigma=\frac{1}{g}\begin{pmatrix}h & f\\ f & \mp h_*\end{pmatrix}, \tag{44.8}$$

其中

$$hh_*\pm f^2=g_*g, \tag{44.9}$$

式内的复号当 f 为偶时取＋，奇时取－。下面将說明 g 是 Hurwitz 多項式，且能唯一决定。現設 k_{21} 和 k_{21*} 的公因式为 f_0，f_0 当然是偶或奇多項式。若写

$$k_{21}=f_0\psi_{0*}, \tag{44.10}$$

則由(44.5)，

$$k_{22}=\mp k_{11*}\psi_{0*}/\psi_0,$$

k_{22} 是一个多項式，所以 k_{11*} 应被 ψ_0 除尽，且 k_{22} 含有因子 ψ_{0*}。結果 k_{11}，k_{21} 和 k_{22} 任一个都有因子 ψ_{0*}。因此，由(44.3)，$g_{0*}g_0$ 被 $\psi_{0*}\psi_0$ 除尽。但 g_0 是最小的公分母，和 ψ_{0*} 沒有公因子，所以 g_{0*} 必須被 ψ_{0*} 除尽。卽 ψ_0 是 g_0 的因子，ψ_0 是一个 Hurwitz 多項式。因此，在(44.7)内，設 $\psi=\psi_0$，Σ 写成(44.8)的形式，且 f 为偶或奇多項式，則使 g 为 Hurwitz 多項式的 ψ 不外就是 ψ_0。这里的 f，g 和 h 和 Cauer(1940)所用的記号是完全相同的，把它归結为(44.8)的形式，就对濾波器在輸入和輸出端的区别上有了全面的理解。

§45 全通网絡

我們来研究 S 矩陣的变换与实际回路的对应。

定理 12 若 U 为右半平面内沒有极点的 n 阶对酉矩陣，則 S 的对酉变换 $U'SU$ 能在 $2n$ 端网絡 S 上联接一个全通 $4n$ 端网絡

$$\Sigma_U=\begin{pmatrix}0 & U'\\ U & 0\end{pmatrix} \tag{45.1}$$

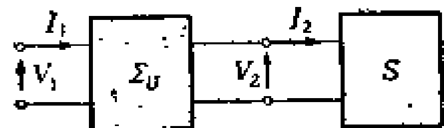


图 45.1

实現出来。

在图 45.1 內，根据 S 矩陣的定义，

$$S(V_2+I_2)=V_2-I_2, \tag{45.2}$$

$$\begin{pmatrix}0 & U'\\ U & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1+I_1\\ V_2-I_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_1-I_1\\ V_2+I_2\end{pmatrix}. \tag{45.3}$$

特别U是正交矩陣时，把它用T表示，且Σ_U亦写成Σ_T，則由(45.3)，

$$V_2 = T'^{-1} V_1, \quad I_2 = T I_1, \tag{45.4}$$

按照(38.6)和(38.7)，Σ_T是由理想变压器組成的$4n$端网絡。把(45.4)代入(45.2)内，

$$T'ST(V_1+I_1) = V_1 - I_1, \tag{45.5}$$

卽S矩陣的正交变换可以用理想变压器网絡实現出来。且这是定理10(§43)的証明中保留的一点。但由于Σ_U满足定理10系的条件，所以能用电抗$4n$端网絡实現出来。又把(45.3)代入(45.2)内，

$$U'SU(V_1+I_1) = V_1 - I_1, \tag{45.6}$$

这就証明了定理。如果S是零矩陣，則$U'SU$也是零矩陣，由于n阶的零矩陣意謂n个单位电阻，所以Σ_U代表一般化的**全通网絡**。

問題 若Σ_U代表一个四端网絡，則它的阻抗矩陣可写成

$$Z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z+z^{-1} & z-z^{-1} \\ z-z^{-1} & z+z^{-1} \end{pmatrix}.$$

§46 利用S矩陣的$2n$端网絡綜合法

給定的S矩陣为S时，为了綜合出这个$2n$端网絡，在S上适当地加入l行和l列元素，作出

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} n \\ l \end{matrix} \quad (\Sigma_{11} = S), \tag{46.1}$$
$$\qquad\quad n \qquad l$$

Σ满足定理10系(§43)。它表成电抗$2(n+l)$端网絡，把它終接l个电阻，則按照§37末所述，就得出了S。因为求出了表現Σ的全部电抗$2(n+l)$端网絡，所以若把(46.1)的Σ全部求出，則就得出了S的全部等效网絡。

設S的各个元素的最小公分母是g_0(最高次項的系数为1)，

则 Σ 可写成下列形式:

$$\Sigma = g_0^{-1}\begin{pmatrix} K & K'_{21} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} n \\ l \end{matrix}, \qquad (46.2)$$

其中

$$K = g_0 S, \quad K_{21} = g_0\Sigma_{21}, \quad K_{22} = g_0\Sigma_{22},$$

K 的元素都是多項式，K_{21} 和 K_{22} 的元素一般是有理函数。为了使 Σ 是对酉矩陣，必要和充分的条件是

$$(H=)\, g_{0*}g_0 1_n - K_*K = K'_{21*}K_{21}, \qquad (46.3)$$

$$K_*K'_{21} + K'_{21*}K_{22} = 0, \qquad (46.4)$$

$$g_{0*}g_0 1_l - K_{22*}K_{22} = K_{21*}K'_{21}. \qquad (46.5)$$

(46.3)的左边，根据定理 10(§ 43)的条件(ii)，是在虚軸上非負值的 Hermite 矩陣，令它为 H。令 H 的秩数为 ρ，则由(46.3)，当然有

$$l \geqslant \rho. \qquad (46.6)$$

如果注意(40.11)式，那末知道它和定理 9 有关。滿足(46.1)的 Σ 有无数多个，我們首先求出有代表性的一个。当 S 补充成(46.1)即(46.2)时，根据(46.3)，必須把 H 分解成 K'_{21*} 与 K_{21} 之积的形式。K_{21} 的元素考虑成多項式的分解。設 P_1 和 Q_1 为行列式不等于零的常数的适当的 n 次多項式矩陣，则 K 可写成如下的形式:

$$K = Q_1 \Lambda_k P_1, \qquad (46.7)$$

其中

$$\Lambda_k = \mathrm{diag}(k_1, \cdots, k_n). \qquad (46.8)$$

k_i $(i=1,\cdots,n)$ 是 K 的初等因子，对于超过 K 的秩数的 i，$k_i=0$。

任意多項式矩陣能用(46.7)的形式表出。多項式矩陣所有的 i 阶子行列式的最大公因子叫作第 i 行列式因子，第 i 行列式因子除以第$(i-1)$行列式因子所得的叫作第 i 初等因子。第$(i-1)$初等因子是第 i 初等因子的因

子，初等因子的这种性质在以下討論中需特别注意。$k_1\cdots k_i$ 是 K 的第 i 行列式因子，k_i 是 K 的第 i 初等因子。又 k_i 被 k_{i-1} 除尽。在初等因子中，最高次项的系数設为1。

假定 k_i 和 g_0 的最大公因子为 k_{0i}，若令

$$A_1 = \mathrm{diag}(k_{01}, \cdots, k_{0n}), \tag{46.9}$$

则根据(46.3)和(46.7)，$A_{1*}^{-1} P_{1*}'^{-1} H P_1^{-1} A_1^{-1}$ 是一个多项式矩陣，于是能写出

$$H = A_{1*} P_{1*}' H_1 P_1 A_1, \tag{46.10}$$

H_1 是秩数为 ρ 的多项式矩陣且是虚軸上非負值的 Hermite 矩陣。令 H_1 的初等因子为 $h_1, \cdots, h_\rho, 0, \cdots, 0$，由于 $H_1 = H_{1*}$，它是一个偶或奇的多项式，且和(46.7)一样能写成

$$H_1 = Q_2 \,\mathrm{diag}(h_1, \cdots, h_\rho, 0, \cdots, 0) P_2. \tag{46.11}$$

按照(46.11)，$H_1 P_2^{-1}$ 的第 i 列元素 $(i \leqslant \rho)$ 能被 h_i 除尽，对于 $i > \rho$，则为零。$P_{2*}'^{-1} H_1 P_2^{-1}$ 的第 i 列也有同样情况，且由 $P_{2*}'^{-1} H_1 P_2^{-1}$ 的形式，对于第 i 行的元素也是这样。即 $P_2'^{-1} H_1 P_2^{-1}$ 内左上角 ρ 阶主子矩陣表现为 H_ρ，而 H_ρ 以外的元素全部为零。又 H_ρ 是滿秩的，它的第 i 行和列 $(i=1, \cdots, \rho)$ 的元素能被 h_i 除尽。因此，引入記号

$$\mathbf{1}_{\rho,n} = (\underset{\rho}{1_\rho}, \underset{n-\rho}{0})_\rho, \tag{46.12}$$

我們得到

$$P_{2*}'^{-1} H_1 P_2^{-1} = \mathbf{1}_{\rho,n}' H_\rho \mathbf{1}_{\rho,n}, \tag{46.13}$$

即

$$H_1 = P_{2*}' \mathbf{1}_{\rho,n}' H_\rho \mathbf{1}_{\rho,n} P_2. \tag{46.14}$$

这里让我們研究 h_i 的性质。在 h_i 中，若令平方形式的最高次的偶或奇多项式为 f_i（最高次项的系数为1），则可写出

$$h_i = (f_i)^2 \varphi_i = \pm f_i f_{i*} \varphi_i. \tag{46.15}$$

复号对应于 f_i 的偶和奇。由于 φ_i 沒有平方的因式，所以是一个只

有1阶零点的偶或奇多項式。因此写出

$$h_i=\pm f_i f_{i*}\psi_i\psi_{i*}\varphi_{0i},$$

ψ_i是只有1阶零点的 Hurwitz 多項式，φ_{0i}是只有虛軸上1阶零点的多項式。它們的最高次項系数都是1。下面証明φ_{0i}是一个实常数。令

$$\Lambda=\mathrm{diag}(f_{1*}\psi_{1*},\ \cdots,\ f_{\rho*}\psi_{\rho*}),$$

$$\Lambda_\varphi=\mathrm{diag}(\varphi_{01},\ \cdots,\ \varphi_{0\rho}),$$

H_ρ可写成

$$H_\rho=\Lambda_\varphi\Lambda_* H_0\Lambda,$$

其中H_0是一个多項式矩陣，$|H_0|$是一个不等于零的常数。可是H_ρ的第$(i,\ i)$元素被h_i除尽，根据非負値的条件，在虛軸上不能为負，即不能变号，所以在虛軸沒有奇数阶的零点。但是，h_i在虛軸上有奇数阶零点时，即φ_{0i}不是一个常数时，$(i,\ i)$元素必須被$h_i\varphi_{0i}$除尽。就是說，$h_i,\ \cdots,\ h_{i+p-1}$在虛軸上一点处有ν(奇数)阶的零点，$(i,\ i),\ \cdots,\ (i+p-1,\ i+p-1)$的对角綫元素至少有$(\nu+1)$阶零点。含有这种对角綫元素的$p$阶主子矩陣的全部元素，按照正值条件，至少有$(\nu+1)$阶零点。于是$H_\rho$就是这种形式，前述的$H_0$不仅是多項式矩陣，并且$H_0\Lambda_\varphi^{-1}$也是多項式矩陣。这和$|H_0|$为常数的說法是相違反的。即$\varphi_{0i}$ $(i=1,\ \cdots,\ \rho)$必須是常数。結果得出

$$h_i=\pm f_i f_{i*}\psi_i\psi_{i*}\quad(i=1,\ \cdots,\ \rho),\tag{46.16}$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(f_{1*}\psi_{1*},\ \cdots,\ f_{\rho*}\psi_{\rho*}),\tag{46.17}$$

$$H_\rho=\Lambda_* H_0\Lambda.\tag{46.18}$$

f_i是偶或奇多項式，ψ_i是只有一阶零点的 Hurwitz 多項式，H_0是多項式矩陣，且是一个在虛軸上非負值的 Hermite 矩陣，$|H_0|$是不等于零的常数。

以上也許不容易理解，h_i的某个素因子是含在H_ρ和H_0各个元素中某

个幂次內，須注意 h_{i-1} 是 h_i 的因子，再擇一較好的例子来图解，則比較容易清楚。

以后証明 H_0 可分解成

$$H_0=P'_{0*}P_0. \tag{46.19}$$

P_0 是 ρ 阶的多項式矩陣，$|P_0|$ 当然是不等于零的常数。总結一下，可得

$$H=P'_*1'_{\rho,n}\Lambda_*P'_{0*}P_0\Lambda 1_{\rho,n}P, \tag{46.20}$$

其中

$$P=P_2\Lambda_1P_1. \tag{46.21}$$

H_0 是 ρ 阶多項式矩陣，不失一般性，我們可以假定它的 ρ 个对角綫元素自左上角按 λ 次数的增加而排列。由于 H_0 是滿秩的，且是虛軸上非負値的 Hermite 矩陣，所以各个对角綫元素是偶次的，并且不等于零。令(ρ,ρ)元素的次数为 δ. 如果 $\delta=0$，則 H_0 是一个常数矩陣，参照(39.3)，在对角綫矩陣中，取对角綫元素的平方根直接分解。如果 $\delta\neq0$，則可选擇一个对角綫元素为 1 或 λ 的正幂次的适当的对角綫矩陣 Λ_0，使 $\Lambda_{0*}H_0\Lambda_0$ 的所有的对角綫元素均为 δ 次的。于是 $\Lambda_{0*}H_0\Lambda_0$ 全部的元素最高是 δ 次的，因为 $\Lambda_{0*}H_0\Lambda_0$ 在虛軸上是非負値的。再由于 $|H_0|$ 是常数，$|\Lambda_{0*}|\,|\Lambda_0|$ 最高不超过 $\delta(\rho-1)$ 次，所以 $|\Lambda_{0*}H_0\Lambda_0|$ 最高是 $\delta(\rho-1)$ 次。因此，若由 $\Lambda_{0*}H_0\Lambda_0$ 的元素的 λ^δ 項系数作出矩陣 C_0，則 $|C_0|=0$. 假定 C_0 左上角$(\rho-1)$阶主子行列式不等于零，則把 C_0 的最初$(\rho-1)$列乘以适当常数后加至第 ρ 列，可找到一个綫性变换 A_0，使 $A'_0C_0A_0$ 的第 ρ 行和列的元素变成零。如果令 $\Lambda_1=\Lambda_0A_0\Lambda_0^{-1}$，則由 $|\Lambda_1|=1$ 和 Λ_0 的形式知道，Λ_1 是一个多項式矩陣，且 $\Lambda_{1*}H_0\Lambda_1$ 的(ρ,ρ)元素的次数，最高等于 $\delta-2$. 再由于 $|C_0|=0$，且 C_0 的(1, 1)元素不等于零，所以 C_0 左上角$(r-1)$阶主子行列式不等于零，而 r 阶的等于零，这样的 r 是存在的。因此，和以前群的 $r=\rho$ 的情况一样，(r,r)元素的次数至少可以降低二次。反复进行，最后可使全部的元素都为常数，达到非負値矩陣而得出(46.19)。

其次令

$$J_{21}=P_0\Lambda 1_{\rho,n}P, \tag{46.22}$$

J_{21} 是(ρ,n)型的多項式矩陣，按照(46.20)，

$$H=J'_{21*}J_{21}, \tag{46.23}$$

它和(46.3)是同一形式。于是可得一个适当的矩陣J_{22}，且作出对酉矩陣

$$\Sigma_R=g_0^{-1}\begin{pmatrix} K & J'_{21} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}. \tag{46.24}$$

我們引入記号

$$J_{21}^{-1}=P^{-1}1'_{\rho,n}\Lambda^{-1}P_0^{-1}, \tag{46.25}$$

則由(46.22)，

$$J_{21}J_{21}^{-1}=1_{\rho}. \tag{46.26}$$

其次注意(46.4)，作出

$$J_{22}=-J_{21}K_*J_{21*}^{-1}, \tag{46.27}$$

J_{22}是ρ阶的矩陣，且由(46.26)和(46.23)，

$$\begin{aligned} J_{22}&=-(J_{21*}^{-1\prime}J'_{21*})J_{21}K_*J_{21*}^{-1} \\ &=-J_{21*}^{-1\prime}HK_*J_{21*}^{-1}, \end{aligned} \tag{46.28}$$

由于HK_*按(46.3)是一个对称矩陣，所以J_{22}是对称矩陣。J_{21}和J_{22}满足(46.4)和(46.5)的条件，这只要注意$HK_*=K_*H_*$且經过少許計算就可明白。即Σ_R是对酉的。然后来証明Σ_R在右半平面內沒有极点。把(46.20)，(46.22)，(46.23)和(46.25)代入(46.28)，可算出

$$J_{22}=-P_0\Lambda K_{\rho*}\Lambda_*^{-1}P_0^{-1}=-P_{0*}'^{-1}\Lambda_*^{-1}H_\rho K_{\rho*}\Lambda_*^{-1}P_{0*}^{-1}, \tag{46.29}$$

其中

$$K_{\rho*}=1_{\rho,n}PK_*P_*^{-1}1'_{\rho,n}. \tag{46.30}$$

K_ρ是ρ阶的多項式矩陣，$H_\rho K_{\rho*}$是按J_{22}的对称性而对称的。因此，$H_\rho K_{\rho*}$的第i行和列的元素能被h_i除尽，$\Lambda^{-1}H_\rho K_{\rho*}\Lambda_*^{-1}$是多項式矩陣，又$\Lambda_*^{-1}\Lambda$依照(46.17)在右半平面內沒有极点，所以

$$\Lambda_*^{-1}H_\rho K_{\rho*}\Lambda_*^{-1}=(\Lambda_*^{-1}\Lambda)\Lambda^{-1}H_\rho K_{\rho*}\Lambda_*^{-1}$$

在右半平面內也沒有极点。J_{22}也是这样。結果Σ_R满足定理10

系(§43)的条件，可以表成一个电抗$2(n+l)$端网絡。我們将称这个网絡为正規网絡。为了利用定理11(§43)，我們算出

$$|\Sigma_R| = \pm\frac{g_{0*}^n}{g_0^n}\frac{|A_1||A|}{|A_{1*}||A_*|}. \tag{46.31}$$

作为滿足(46.1)的一个Σ，現在求出了Σ_R，根据对酉矩陣的性质，对于$l=\rho$，可以有

$$\Sigma = (1_n \dot{+} U')\Sigma_R(1_n \dot{+} U). \tag{46.32}$$

对于$l>\rho$，$(l-\rho)$阶的任意对酉矩陣設为$\Sigma_{l-\rho}$，可得

$$\Sigma = (1_n \dot{+} U')(\Sigma_R \dot{+} \Sigma_{l-\rho})(1_n \dot{+} U). \tag{46.33}$$

其中U是l阶对酉矩陣，且Σ在右半平面內沒有极点。現在假定$\Sigma_{l-\rho}$在右半平面內也沒有极点，这并不失去一般性。因为$\Sigma_{l-\rho}$在右半平面有极点时，只要从左和右乘以适当的对角形对酉矩陣，很容易变换成右半平面內沒有极点的矩陣。把变换后的矩陣代入(46.33)的$\Sigma_{l-\rho}$，在U內便包含了上述变换的反变换。于是参照定理12(§45)，可得

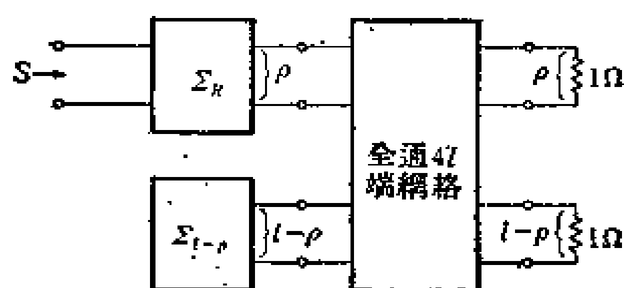


图　46.1

定理13　$2n$端网絡S的全部等效网絡就是在正規网絡Σ_R上加上任意电抗$2(l-\rho)$端网絡所成的$2(n+l)$端电抗网絡，由此即得以l个单位电阻为終端的$2l$对端子的全通网絡(图46.1)。

上面讲的全通网絡就是与(46.32)和(46.33)的U对应的网絡，这个U一般在右半平面內有极点。因此，全通网絡內一般含有負元件。特别，如果U只在左半平面內有极点，那末就可作为普通的无源全通网絡抽取出来。从电阻端子对如果不能抽取无源的全通网絡，那末我們和四端网絡的情况一样，就說是达到最小相移的状态。最小相移的方法由于篇幅限制，这里就省略了，但下面

介紹一些与它有关的事項。

在(46.32)內，由 Σ_R 抽出全通网絡后剩下的最小相移网絡用 Σ_M 表示，Σ_M 是电阻端子对数目最少的 Σ 之中，L 和 C 数目最少的网絡，因此 Σ_M 亦叫作最小网絡(minimal network)。下面的例子表明，Σ_M 不是唯一的，但 $|\Sigma_M|$ 是唯一的。然而另进行正交变换，则 Σ_M 也能唯一地决定。(46.33)的 $\Sigma_{l-\rho}$ 可以考虑成 $(l-\rho)$ 个二端网絡，且每一个等效网絡都能根据这些二端网絡进行分类。但在四端网絡中我們知道，全通网絡含有的 L 和 C 的数目是相同的(图 46.2)，同样，一般的全通网絡也如此。因此，在 Σ_R 內把多余的元件按照(46.32)抽出时，只能以一对 L 和 C 的形式来抽取。然而在 Σ_M 內，尙不知道多余的 L 或 C 能不能以半端的形式剩留下来。現在假定在 Σ_M 內，各含有 n_1 和 n_2 个半端形式的 L 和 C，此时作为 $\Sigma_{l-\rho}$ 加入适当的 n_2 和 n_1 个 L 和 C 以后，就可当作全通网絡把它們全部取出。由于 $\Sigma_{l-\rho}$ 至多是 (n_1+n_2) 阶的对角矩陣，电阻端子对的增加至多是 (n_1+n_2)。所以一般說来，滿足(46.33)的 Σ 如果有多余的 L 和 C，则能用增加电阻端子对的数目来移去，增加的端子对数目不超过多余电抗的数目。因此有

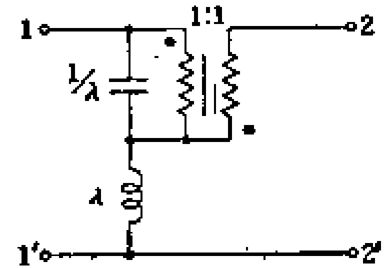


图 46.2

定理 14 L 和 C 数目最少的网絡中，存在 L，R 和 C(理想变压器除外)数目最少的网絡。

L 和 C 的数目为最少的 Σ 用 Σ_m 表示，则 $|\Sigma_m|$ 唯一地由

$$|\Sigma_m| = \pm g_{0*}^{n} g_0^{-n} |A_1||A_{1*}|^{-1} \tag{46.34}$$

給出。$|\Sigma_m|$ 对于 λ 的次数，就是合成 Σ_m 即 S 时所需的 L 和 C 的最小数目。在§42 末讲到了位数，这就等于 S 的位数。Σ_m 有許許多多，其中在(46.1)內求出 l 为最小的即电阻端子对数为最少的网絡，根据定理 14，就得到 L，R，C 数目最小的网絡。

例1　Σ_M 不是唯一的場合。設給定

$$S=\frac{1}{\lambda^2+\sqrt{19}\,\lambda+5}\begin{pmatrix}\lambda+3 & 0\\ 0 & -\lambda-3\end{pmatrix},$$

則可求出 Σ_R 为

$$\Sigma_R=\frac{1}{\lambda^2+\sqrt{19}\,\lambda+5}\left(\begin{array}{cc|cc}\lambda+3 & 0 & \lambda^2-4 & 0\\ 0 & -\lambda-3 & 0 & \lambda^2-4\\ \hline \lambda^2-4 & 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & \lambda^2-4 & 0 & -\lambda+3\end{array}\right).$$

Σ_R 是最小相移的，可是还存在一个最小网絡

$$\Sigma_M=\frac{1}{\lambda^2+\sqrt{19}\,\lambda+5}\left(\begin{array}{cc|cc}\lambda+3 & 0 & \lambda^2+4 & 4\lambda\\ 0 & -\lambda-3 & 4\lambda & \lambda^2+4\\ \hline \lambda^2+4 & 4\lambda & \lambda-3 & 0\\ 4\lambda & \lambda^2+4 & 0 & \lambda-3\end{array}\right).$$

例2　最少元件数目的网絡。現考慮

$$S=\frac{4}{\lambda+5}.$$

由于 $Z=(\lambda+9)/(\lambda+1)$，它很容易綜合成图 46.3 的样子。另一方面，我們得到

$$\Sigma_R=\Sigma_M=\frac{1}{\lambda+5}\begin{pmatrix}4 & -\lambda+3\\ -\lambda+3 & 4\dfrac{\lambda-3}{\lambda+3}\end{pmatrix},$$

它如图 46.4 所示，包含一个电感和一个电容。这个 L 可以在(46.33)內加一个 C 作为 $\Sigma_{l-p}=(-\lambda+3)/(\lambda+3)$ 抽出一个全通网絡而移去。結果得到

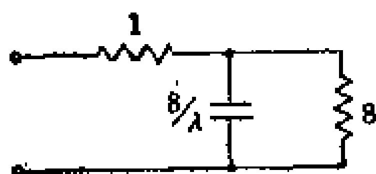


图　46.3

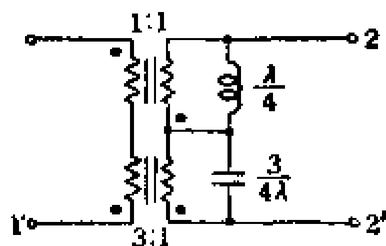


图　46.4

$$\Sigma_m=\frac{1}{\lambda+5}\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{3}(\lambda+9) & -\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda \\ -\frac{1}{3}(\lambda+9) & -\frac{4}{9}(2\lambda+9) & \frac{2\sqrt{2}}{9}\lambda \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\lambda & \frac{2\sqrt{2}}{9}\lambda & \frac{1}{9}(-\lambda+45) \end{pmatrix},$$

終接两个电阻后，这就是图 46.3 的网絡。

§ 47 非互易 2n 端网絡

导入了理想回轉器(Tellegen, 1948)，就能研究不滿足互易定理的无源网絡。对于这种网絡，必須考慮非对称的正实矩陣。我們有下列的定义。

定义 F 在右半平面內滿秩，若 $F+F^*$ 在右半平面上是非負值的 Hermite 矩陣，則 F 称为广义的正实矩陣。

对于广义的正实矩陣，也可以和通常对称的正实矩陣一样地进行討論。若在这种基础上研究非互易 2n 端网絡的 S 矩陣，則可得出和定理 10(§ 43)差不多的一个定理，只不过現在沒有 S 的对称限制，且現在以 $1_n-S'_*S$ 代替 1_n-S_*S. 对于无損耗的 2n 端网絡的 S 矩陣 Σ, $\Sigma'_*\Sigma=1_n$ 成立，Σ 可用 L, C, 理想变压器和理想回轉器綜合出来，$|\Sigma|$ 的次数可表成 L 和 C 的个数。S 的对酉变換是 U_2SU_1, 与它对应的全通网絡和(45.1)不同，是下列的形式：

$$\Sigma_U=\begin{pmatrix} 0 & U_2 \\ U_1 & 0 \end{pmatrix},$$

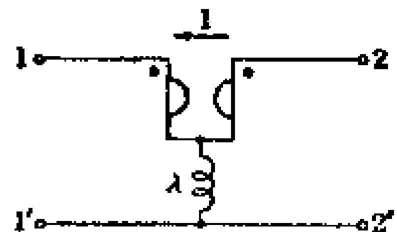


图 47.1

例如在四端网絡的情况下，就是图 47.1 所示的全通网絡。因此，利用非互易全通网絡，可以不加 $\Sigma_{l-\rho}$，即不增加电阻端子对而把上节所述的半端形的多余的 L 或 C 除去。就是說，通常的互易 2n 端网絡若用

含有理想回轉器的回路实現时，一般 L, C, R 的数目将减少。对于有損耗的 $2n$ 端网絡，在給定的矩陣上也可添补而作出对西矩陣。于是非互易的 $2n$ 端网絡能进行几乎和互易的 $2n$ 端网絡相平行的处理。可是在具体內容上，考虑到非互易网絡的特点，有趣的問題是很多的。例如决定理想回轉器的最小数目等問題，这些本质的問題尚未解决。再有所謂有源网絡是限于綫性的网絡，这些东西可以說还不很清楚。在互易的网絡內若包含了理想变压器关系的問題，則可以期待网絡綜合理論新的发展。

参考文献

这里的文献只限于少数的論文和书籍，按章节的次序列举于下，且附加了簡单的説明。

論 文

[1] O. Brune: Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency, J. M. P. **10** (1931), 191~236.

这里最初定义了正实函数，它是一般二端网絡綜合法的历史文献。

关于电抗四端网絡的設計理論，在文献[16]中几乎都写了，但有关工作特性理論的論文，还有一篇代表著作是

[2] S. Darlington: Synthesis of reactance 4-poles, J. M. P. **18**(1939), 257~353.

其次，关于 § 29, 32, 33, 35, 36 的代表性文献各举出一篇如下：

[3] S. Darlington: The potential analogue method of network synthesis, B. S. T. J., **30**(1951), 315~365.

[4] 喜安：延迟网絡的一种設計方法，电試汇，**7**(1943), 153~157.［譯者注：請参照喜安："延迟网絡的一种設計方法"，电气通信学会杂志，第27卷，第8号，昭和18年8月，598~610. 及其补遺，电气通信学会杂志，第28卷，第8号，昭和19年8月，9~10.］

[5] W. H. Kautz: Network synthesis for specified transient response, M. I. T. Tech. Rep., **209**(1952).［譯者注：請参照 W. H. Kautz: Transient synthesis in the Time-Domain, Trans. IRE PGCT., Vol. CT-1(1954) No. 3, 29~39.］

[6] 澀野：分布参数网絡的設計理論，通研研实报，**4**(1955), 379~417.

[7] B. D. H. Tellegen: The gyrator, a new electric network element, Philips. Res. Rep., **3**(1948), 81~101.

此外，在下列一篇論文中，对逼近理論作了概括的叙述，且列出了許多参考文献，可以参考一下。

[8] S. Winkler: The approximation problem of network synthesis, Trans. IRE CT-1, **3**(1954), 5~20.

从 § 37 到 § 41，若有必要，請参照文献[9]。下面两篇是文献[1]在 $2n$ 端网絡上的推广。

[9] 大野：一般多端网絡的构成理論，电气通信学会杂志，**31**(1948), 13~26.

[10] B. McMillan: Introduction to formal realizability theory, B. S. T. J.,

31(1962), 217～279, 541～600.

文献[9]和[10]在方法上稍有不同。文献[10]内导入矩陣次数(§42)的概念,討論 L 和 C 的最少数目,整个文章比較难懂。本书原来打算用易懂方式介紹出来,但由于篇幅的关系,只能割爱。下面一篇也是文献[1]的推广。

[11] B. D. H. Tellegen: Synthesis of $2n$-poles by networks containing the minimum number of elements, J. M. P., **12**(1953), 1～18.

它在討論含有理想变压器的元件数目上是重要的,但在綜合方法上,对于象文献[9]和[10]的特殊情况那样的一般情况,却不适用。此外,在电阻元件数目最少的綜合法方面(§42),还有一篇:

[12] 大野:按照电阻終端电抗网絡群的一般多端网絡构成理論,电气通信学会杂志, **29**(1946), 82～87. J. M. P., **29**(1950), 13～26.

这个方法在导入 S 矩陣方面已經算陈旧了。

在 $2n$ 端网絡方面,有一篇至 1951 年左右的研究綜合报告:

[13] M. Bayard: Synthesis of n-terminal pair networks, Proc. Symposium Modern Network Synthesis (Polytech. Inst. Brooklyn, New York, 1952), 66～83.

关于 §43 以下的 S 矩陣,可参閱

[14] 大野,安浦:按照 S 矩陣的一般多端网絡的构成理論,电气通信学会杂志, **36**(1953), 564～570. 九大工学紀要, **14**(1954), 125～177. Trans. I.R.E., CT-**3**(1956), 111～120.

这一期的 Trans. IRE 是有关 S 矩陣的专刊,載有 S 矩陣的各种应用。

[15] 池野:非互易多端网絡的构成理論,电气通信学会杂志, **37**(1954), 97～102.

这一篇討論了沒有 S 矩陣的非互易网絡的綜合方法,是文献[12]的推广。

书 籍

[16] W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen (Becker und Erler, Leipzig, 1941).

这是一本网絡理論的經典著作,如果有了这一本书,则除最近数年間的研究外,就几乎不需要参考其他的直接原著。数学的知識也扼要地收集在内。关于初等因子(§42, 46)可参看本丛书的代数学或其他的代数学和矩陣論的书籍。最近又出了第2版(Akademic-Verlag, Berlin, 1954).[譯者注:1960 年出版了第 II 卷,其中收集了 Cauer生前有关放大器設計、脉冲压縮的著作以及関乃大的損耗元件实現理論等文章。]

[17] H. W. Bode: Network analysis and feedback amplifier design (D. Van Nostrand, New York, 1945). 喜安譯:网絡和反饋的理論(岩波书店, 1955).
[譯者注:有中譯本,网絡分析和反饋放大器設計,人民邮电出版社, 1958.]

在这本书内,一般地討論了有源网絡和很好地写出了实部和虚部的关系。

日文书籍有:

[18] 永井,神谷:傳送回路网学(コロナ社, 1937)。[譯者注:1959 年的改訂 14 版,分上下两册,内容上作了許多修改。]

这是一本有名的著作，对网絡理論作了很好的叙述，影象参数部分特别詳細。还有

[19] 宮田：回路网合成 I, II (共立社，1954)

也是很有趣的一本。关于 *RC* 网絡，本书內讲得很簡单，进一步可参考

[20] 尾崎：*RC* 回路网 I, II (共立社通信工学讲座，1955)。

关于 § 42 以下的內容，已經写成书的只有

[21] M. Bayard: Théorie des réseaux de Kirchhoff (Revue d'Optique, Paris, 1954)

对 $3n$ 端网絡討論得特別詳細。此外，还有一本四端网絡方面的有名著作

[22] C. M. Gewertz: Network synthesis (Williams and Wilkins, Baltimore, 1933)。早田保实譯：电气回路网构成理論(上卷)(コロナ社，1944.)。

問題的討論比較陈旧，但許多数值例子值得参考。在文献[19]內，也有 Gewertz 理論的介紹。